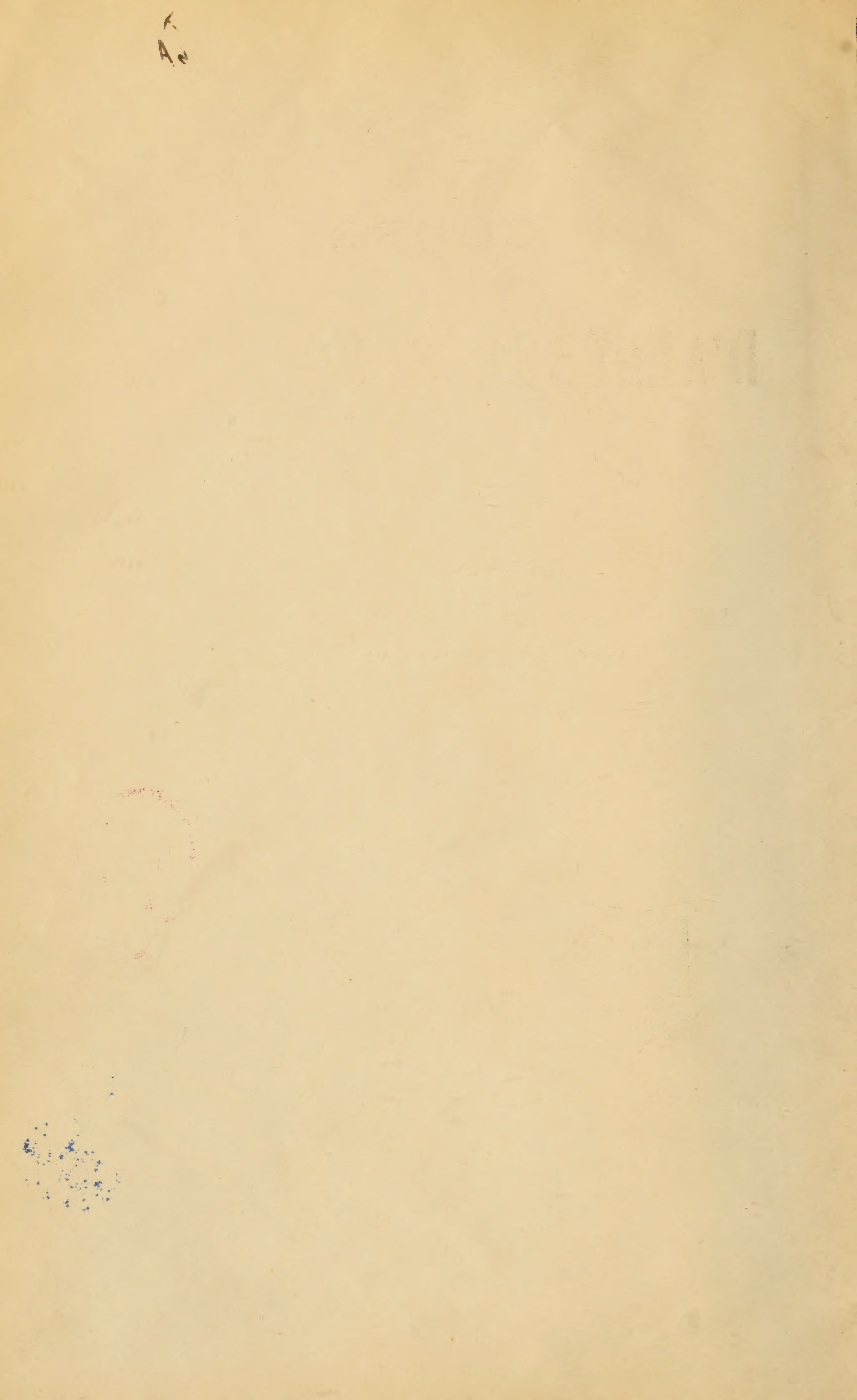



12-10-53



COURS

D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

PAR

JOSEPH NEUBERG

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE



LIÉGE
IMP. LIÉGEOISE, H. PONCELET
RUE DES CLARISSES, 52

LIÉGE
EDOUARD GNUSÉ
LIBRAIRE-ÉDITEUR
51, Rue du Pont-d'Ile, 51

1902

ALGÈBRE SUPÉRIEURE

INTRODUCTION

1. On appelle *variable* toute quantité qui, dans une même question d'analyse, peut prendre un nombre indéfini de valeurs différentes. Une *constante* est une quantité qui, dans une même question, conserve une valeur fixe et déterminée.

Les variables sont ordinairement désignées par les dernières lettres x, y, ... de l'alphabet, et les constantes par les premières lettres a, b...

Il est quelquefois commode de recourir à la représentation géométrique suivante : Après avoir marqué sur un *axe* $x'x$ une

Fig. 1

origine O et une unité de longueur OI, on convient de *représenter* un nombre positif a (rationnel ou irrationnel) par le point A de Ox dont l'*abscisse* OA a pour mesure a, et le nombre négatif $-a$ par le point A' de Ox' dont l'*abscisse* OA' a pour mesure a.

On dit qu'un nombre c appartient à l'*intervalle* (a, b) lorsque

$$a \leq c \leq b.$$

Si A, B, C sont les points représentatifs des nombres a, b, c, le point C appartient nécessairement au segment AB.

2. On dit qu'une variable y est *fonction* d'une autre variable x lorsqu'à toute valeur de x correspond une valeur déterminée de y.

On représente une fonction de x qu'on ne veut pas spécifier, par une notation telle que $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, ...; la valeur que prend cette fonction pour une valeur donnée $x = a$, est alors désignée respectivement par $F(a)$, $f(a)$, $\varphi(a)$, ...

Une fonction de x est dite *explicite* lorsqu'elle est exprimée au moyen de x par des signes connus, indiquant le système d'opérations à faire sur une valeur donnée de x pour en tirer celle de la fonction; telles sont les fonctions $3 + 2x - 5x^2$, $\log(5x^2 - 3)$, ... Quand il n'en est pas ainsi, la fonction est dite *implicite*; ainsi, quand on donne l'équation

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x = 0,$$

y est une fonction implicite de x.

On obtient une représentation géométrique d'une fonction $y = f(x)$ en construisant la courbe dont les points ont pour abscisse et ordonnée un système de valeurs de x et y satisfaisant à la relation $y = f(x)$.

3. On appelle *fonction entière* de x toute expression de la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$

dans laquelle les exposants de x sont des nombres entiers positifs, et les *coefficients* A_0, A_1, ..., A_{m-1}, A_m des constantes quelconques.

Le quotient de deux fonctions entières de x est une fonction nommée *fraction rationnelle*.

Une *fonction irrationnelle* de x est une expression qui renferme un ou plusieurs radicaux portant sur des fonctions de x; telles sont les expressions

$$\sqrt[5]{x^2}, \quad \sqrt[3]{ax + b}, \quad \sqrt[4]{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}}}.$$

On dit que y est une *fonction algébrique* de x lorsque la dépendance entre ces variables peut être exprimée par une équation de la forme

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \dots + A_{m-1} y + A_m = 0,$$

où les coefficients A_0, A_1, .., A_{m-1}, A_m sont des fonctions entières de x.

Les fonctions non algébriques sont appelées *fonctions transcendantes*. Les plus simples sont la fonction exponentielle a^x,

la fonction logarithmique $\log x$, les fonctions trigonométriques (circulaires) directes $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$, et les fonctions trigonométriques inverses ou fonctions cyclométriques $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, etc.

4. Si une variable u dépend de plusieurs autres x, y, ... de telle sorte qu'à tout système de valeurs de celles-ci corresponde une valeur bien déterminée de u, on dit que u est une fonction de x, y, ... Par exemple, le volume d'un cylindre droit est une fonction du rayon de la base et de la hauteur.

Une fonction des variables x, y, ... se désigne souvent par l'une des notations $F(x, y, \ldots)$, $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$, et la valeur de la fonction qui correspond aux valeurs données $x = a$, $y = b$, ... s'indique par $F(a, b, \ldots)$, $f(a, b, \ldots)$, ...

Les variables que l'on considère dans une même question dépendent toujours les unes des autres. Celles dont les valeurs sont regardées comme arbitraires ont reçu le nom de *variables indépendantes;* les autres, dont les valeurs sont déterminées par celles des premières, sont des *fonctions* de celles-ci et sont aussi appelées *variables dépendantes.* Ainsi, si l'on donne deux équations entre trois variables x, y et z, on peut choisir x comme variable indépendante et regarder y et z comme des fonctions de x.

Les qualificatifs : *explicite, implicite, entière, rationnelle, irrationnelle, algébrique, transcendante*, se transportent facilement aux fonctions de plusieurs variables.

Exercices.

Construire les lignes qui correspondent aux équations

$$y = \sin x, \quad y = \sin^2 x, \quad y = a^x,$$
$$y = E(x), \quad y = xE(x), \quad y^2 = xE(x).$$

On représente par $E(x)$ le plus grand nombre entier contenu dans x ainsi $E\left(\frac{13}{5}\right) = 2$, $E(7) = 7$, $E\left(-\frac{13}{5}\right) = -3$.

CHAPITRE I.

IMAGINAIRES.

PRÉLIMINAIRES.

5. Définitions. — On appelle *expression imaginaire*, *quantité complexe* ou, simplement, *imaginaire*, toute expression de la forme $\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$, dans laquelle le radical porte sur une quantité *essentiellement négative* $(-\beta^2)$.

On convient d'étendre aux imaginaires les règles démontrées pour les quantités réelles. D'après cela on écrit

$$\sqrt{-\beta^2} = \sqrt{\beta^2(-1)} = \sqrt{\beta^2}\sqrt{-1} = \beta\sqrt{-1},$$

et l'expression $\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$ est ramenée à la forme $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$.

Le symbole $\sqrt{-1}$ est souvent désigné par la lettre i, de sorte que le type général d'une imaginaire est $a + bi$, a et b étant des nombres positifs ou négatifs.

Si on suppose $b = 0$, on admet que l'expression $a + bi$ se réduit à a; par là, les quantités réelles sont renfermées comme cas particuliers dans les imaginaires.

Lorsque $a = 0$, on a l'*imaginaire pure* bi.

On appelle *imaginaires conjuguées* deux imaginaires $a + bi$ et $a - bi$, qui ne diffèrent que par le signe du coefficient de i.

Le *module* d'une imaginaire est la racine carrée de la somme des carrés de la partie réelle et du coefficient de i, cette racine étant prise *positivement*. Le carré du module est appelé *norme*.

Le module de $a + bi$ est donc égal à $+\sqrt{a^2 + b^2}$; on le représente souvent par $mod(a + bi)$ ou par $|a + bi|$. Par exemple :

$$|3 + 4i| = +5, \quad |5 - \sqrt{-3}| = +\sqrt{28}.$$

Le module d'un nombre réel, positif ou négatif, est sa valeur absolue.

6. Imaginaires égales. — Deux expressions imaginaires sont dites égales, quand les parties réelles sont égales entre elles ainsi que les coefficients de i; en sorte que l'égalité

$$a + bi = a' + b'i$$

implique les deux égalités $a = a'$, $b = b'$.

En particulier, l'égalité $a + bi = 0$ exige $a = 0$, $b = 0$.

7. Théorème. — *Pour qu'une imaginaire soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul.*

En effet, si l'imaginaire $a + bi$ est nulle, on a $a = 0$, $b = 0$; donc $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$. Réciproquement, si $a^2 + b^2 = 0$, on a $a = 0$, $b = 0$.

8. Forme trigonométrique des imaginaires. — *Toute imaginaire* a + bi *est réductible à la forme* r(cos θ + i sin θ).

Car l'équation

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

se décompose en deux autres (**6**) :

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta, \qquad (1)$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}\cdot$$

On convient de prendre positivement le radical, r est donc le module de l'imaginaire.

L'égalité $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$ donne pour θ deux valeurs comprises entre 0 et 2π, mais les égalités (1) montrent que $\cos\theta$ a le signe de a et $\sin\theta$ celui de b, et ces signes déterminent le quadrant auquel appartient θ. Soit ω l'arc unique compris entre 0 et 2π et répondant aux formules (1); nous pourrons poser $\theta = \omega + 2n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul.

L'arc θ est appelé l'*argument* ou l'*amplitude* de l'imaginaire $a + bi$; il n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près.

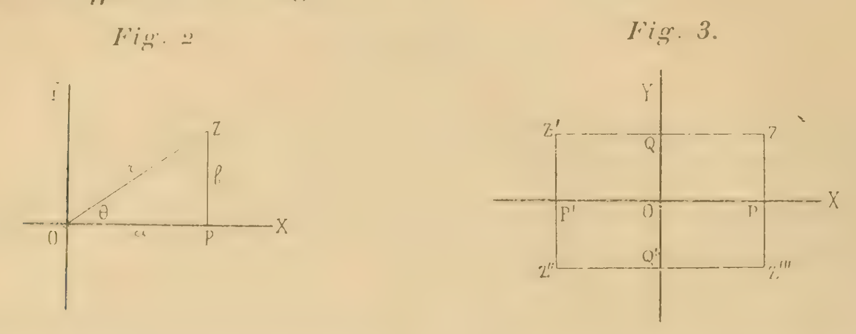
Remarque. *Si deux imaginaires sont égales, leurs modules sont égaux et leurs arguments diffèrent d'un multiple de* 2π.

9. Représentation géométrique des imaginaires.

I. Soient OX, OY deux axes de coordonnées rectangulaires.

On convient de représenter l'imaginaire a + bi *par le point* Z (fig. 2) *ayant pour abscisse* a *et pour ordonnée* b ; ce point est appelé l'*affixe* de l'imaginaire.

Fig. 2 Fig. 3.



En particulier, les nombres réels ont pour affixes les points de l'axe X'X, les imaginaires pures sont représentées par les points de l'axe Y'Y. Aux quatre imaginaires

$$a + bi, \quad -a + bi, \quad -a - bi, \quad a - bi,$$

correspondent les sommets Z, Z', Z'', Z''' d'un rectangle symétrique par rapport aux deux axes coordonnés (*fig. 3*).

II. Si l'on prend OX pour axe et O pour pôle, les coordonnées polaires de Z sont

$$r = \mathrm{OZ}, \quad \theta = \mathrm{ZOX}.$$

Or, le triangle rectangle POZ donne

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta;$$

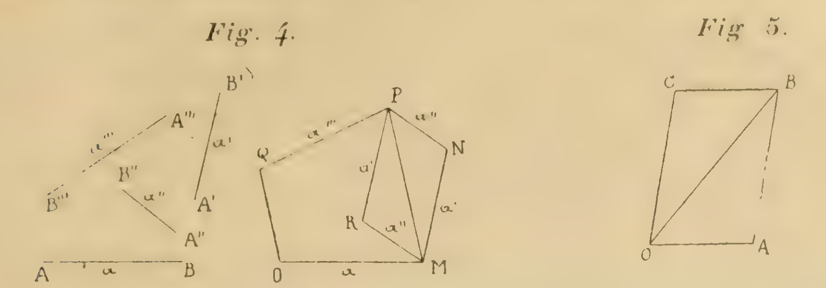
de ces égalités on conclut que *le module et l'argument d'une imaginaire sont les coordonnées polaires de l'affixe de cette quantité.*

10. Vecteurs. — On appelle *vecteur* AB un segment rectiligne AB dont on considère à la fois la longueur et la direction ; il est supposé parcouru par un mobile allant de l'*origine* A à l'*extrémité* B. Deux vecteurs situés sur la même droite ou sur des droites parallèles sont dits avoir la même direction ou des directions opposées suivant qu'ils sont de même sens ou de sens contraires.

Deux vecteurs sont *égaux* ou *équipollents* lorsqu'ils ont même longueur et même direction.

Etant donnés plusieurs vecteurs, par exemple AB, A'B', A''B'', A'''B''' (*fig. 4*), que nous désignons par a, a', a'', a''', on appelle

somme ou *résultante* de ces vecteurs le vecteur OQ qui va de l'origine à l'extrémité d'une ligne brisée OMNPQ dont les côtés



OM, MN, NP, PQ sont respectivement équipollents aux vecteurs donnés ; on écrit

$$OQ = a + a' + a'' + a'''.$$

Cette somme géométrique jouit de toutes les propriétés de la somme algébrique. Ainsi, on peut remplacer deux termes MN et NP par leur somme effectuée MP (*propriété associative*). On peut aussi intervertir l'ordre des termes (*propriété commutative*) ; par exemple, en construisant le parallélogramme MNPR on voit que

$$a + a' + a'' + a''' = a + a'' + a' + a''',$$

et de ce qu'on peut intervertir deux termes consécutifs on conclut aisément qu'une somme est indépendante de l'ordre des termes.

La *différence* OB — OA de deux vecteurs (*fig.* 5) est le vecteur AB qui ajouté au vecteur OA reproduit le vecteur OB. Si l'on achève le parallélogramme OABC, on a

$$OB - OA = AB = OC - OB + BC.$$

On en conclut que retrancher un vecteur OA revient à ajouter un vecteur BC de même longueur et de direction opposée ; on peut donc écrire + OA = — AO.

Enfin, si a désigne un vecteur quelconque et m un nombre proprement dit, ma représente un vecteur de même direction que a et dont la longueur est à celle de a dans le rapport $m : 1$; si m était négatif, on prendrait le second vecteur dans la direction opposée.

Les notions qui précèdent, nous conduisent à une autre interprétation géométrique des imaginaires. Z étant l'affixe de l'imaginaire $a + bi$ (*fig.* 2), nous convenons de dire également

que *cette imaginaire est représentée par le vecteur OZ, dont la longueur est égale au module* r *et dont la direction est déterminée par l'argument* θ. Ce vecteur est la somme des vecteurs OP et PZ; ceux-ci sont représentés par a et par bi si nous convenons de désigner un vecteur parallèle à OX par le nombre qui le mesure (affecté du signe + ou — suivant son sens), et un vecteur de longueur 1 et dirigé suivant OY par la lettre i.

Addition et soustraction des imaginaires.

11. Somme ou différence de deux imaginaires. — Soient les imaginaires $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$. D'après nos conventions (**5**)

$$z \pm z' = (a \pm a') + (b \pm b')i.$$

Si Z et Z' sont les affixes de z et z' (*fig.* 6), l'affixe de $z + z$ est le quatrième sommet A du parallélogramme construit sur

Fig. 6.

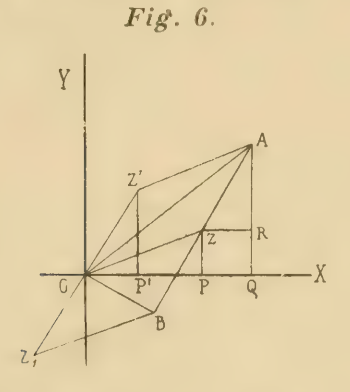
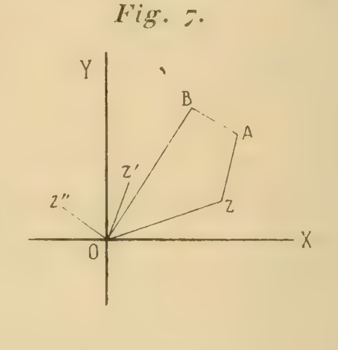


Fig. 7.



OZ et OZ'; car ce sommet a pour coordonnées

$$x = \text{OQ} = \text{OP} + \text{ZR} = \text{OP} + \text{OP}' = a + a',$$
$$y = \text{QA} = \text{PZ} + \text{RA} = \text{PZ} + \text{P}'\text{Z}' = b + b'.$$

De même, si l'on prolonge OZ' de $\text{OZ}_1 = \text{OZ}$, le quatrième sommet B du parallélogramme construit sur OZ et OZ_1 représente la différence $z - z'$. On voit que l'addition et la soustraction des imaginaires correspondent aux opérations de même nom effectuées sur les vecteurs correspondants.

12. Théorème. — *Le module de la somme ou différence de deux imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces imaginaires.*

En effet, les modules des imaginaires z, z', $z + z'$ (*fig.* 6) sont

égaux aux côtés du triangle OZA, et le côté OZ est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence. La démonstration est la même pour $z - z'$.

Cependant, si les vecteurs z et z' ont même direction, on a

$$|z + z'| = |z| + |z'| > |z| - |z'|,$$

en supposant $|z| > |z'|$; s'ils ont des directions opposées,

$$|z + z'| = |z| - |z'| < |z| + |z'|.$$

13. Somme de plusieurs imaginaires. — Soient (*fig.* 7) OZ, OZ′, OZ″ les vecteurs qui correspondent aux imaginaires z, z', z''; la somme $z + z' + z''$ est représentée par le vecteur OB qui va de l'origine à l'extrémité de la ligne brisée OZAB dont les côtés sont équipollents aux vecteurs donnés.

Cette construction montre immédiatement que *le module d'une somme est au plus égal à la somme des modules des parties;* l'égalité a lieu lorsque les vecteurs représentatifs ont même direction.

Multiplication des imaginaires.

14. Théorème. — *Le module d'un produit est égal au produit des modules des facteurs, et son argument est égal à la somme des arguments des facteurs.*

Considérons d'abord deux imaginaires

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

En tenant compte de la relation $i^2 = -1$, on trouve

$$\begin{aligned} zz' &= rr'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)] \\ &= rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]. \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\textit{mod}\, zz' = rr', \quad \textit{arg}\, zz' = \theta + \theta'.$$

Le théorème est donc vrai pour deux facteurs; on l'étend facilement à un nombre quelconque de facteurs.

15. Remarques. — I. Pour démontrer la première partie du théorème, on peut aussi considérer le produit

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

il a pour module

$$\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)},$$

et les modules des facteurs sont $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{c^2 + d^2}$.

II. On vient de trouver l'égalité

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2;$$

il en résulte que *le produit de deux nombres, égaux, chacun, à la somme de deux carrés, est égal à la somme de deux carrés.*

L'hypothèse $c=a$, $d=b$ donne la *formule des triangles rectangles numériques :*

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

16. Théorème. — *Pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

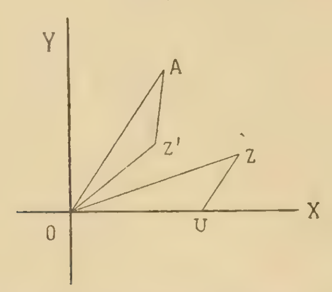
Le théorème est évident pour un produit dont tous les facteurs sont réels.

Considérons maintenant un produit $zz'z''$ composé de facteurs quelconques. Pour qu'il soit nul, il faut et il suffit (**7**) que son module soit nul. Mais ce module, égal au produit des modules de z, z', z'', est un produit de facteurs réels; donc il faut et il suffit que l'un de ces facteurs soit nul, par exemple $|z|$, ce qui revient à $z=0$.

17. Représentation géométrique d'un produit. — Soient OZ, OZ' (*fig. 8*) les vecteurs des imaginaires

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta').$$

Fig. 8.



Prenons sur OX la longueur OU égale à l'unité; OU est le *vecteur unitaire.* Si l'on construit le triangle OZ'A directement semblable au triangle OUZ, OA sera le vecteur du produit zz'. En effet,

$$\frac{OA}{OZ'}=\frac{OZ}{OU},$$

$$angle\ AOX=AOZ'+Z'OX=ZOX+Z'OX,$$

d'où $\quad OA=rr',\quad angle\ AOX=\theta+\theta'.$

Remarque. — Le triangle formé par le produit OA et le facteur OZ′ étant semblable au triangle formé par l'autre facteur OZ et le vecteur unitaire OU, on peut dire que *le produit z′z est formé avec le multiplicande z′ comme le multiplicateur z est formé avec l'unité.*

Division des imaginaires.

18. Théorème. — *Le quotient de deux imaginaires a pour module et pour argument le quotient des modules et la différence des arguments du dividende et du diviseur.*

Soient les imaginaires

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

On a

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\,[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')].$$

Car la dernière quantité, multipliée par z', reproduit z (**14**).

19. Remarques. — I. Pour mettre le quotient $\frac{a + bi}{c + di}$ sous la forme $\alpha + \beta i$, il suffit de multiplier ses deux termes par $c - di$:

$$\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

II. Le quotient a un module fini, excepté quand le diviseur est nul. Il est réel si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

III. Il est utile de remarquer l'égalité

$$\frac{1}{\cos\theta \pm i\sin\theta} = \cos\theta \mp i\sin\theta$$

20. Représentation géométrique d'un quotient. — Soient OA, OZ les vecteurs qui représentent deux imaginaires v, z (*fig. 7*), et OU le *vecteur unitaire*. On obtient le vecteur OZ′ du quotient $\frac{v}{z}$ en construisant le triangle OAZ′ directement semblable au triangle OZU (**17**).

PUISSANCES D'UNE IMAGINAIRE.

21. Puissances de *i*. — On a

$$i = \sqrt{-1},\quad i^2 = -1,\quad i^3 = i^2 i = -\sqrt{-1},\quad i^4 = i^2 i^2 = 1;$$

ensuite

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1,\quad i^{4n+1} = i,\quad i^{4n+2} = i^2,\quad i^{4n+3} = i^3.$$

Donc, *les puissances de* i *se reproduisent périodiquement de quatre en quatre.*

22. Théorème. — *La puissance* m^e *d'une imaginaire a pour module la puissance* m^e *du module et pour argument le produit de l'argument par* m.

La règle de la multiplication (**14**) donne immédiatement

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta).$$

Si $r = 1$, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta,$$

égalité qui porte le nom de *formule de Moivre.*

23. Représentation géométrique des puissances d'une imaginaire. — Soit (*fig.* 9) OZ_1 le vecteur de l'imaginaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prenons sur OX le vecteur unitaire OZ_0 et construisons successivement les triangles OZ_1Z_2, OZ_2Z_3, ... directement semblables au triangle OZ_0Z_1. Les points

$$Z_0,\quad Z_1,\quad Z_2,\quad Z_3, \ldots$$

sont les affixes des puissances

$$z^0,\quad z^1,\quad z^2,\quad z^3, \ldots$$

Les modules de ces puissances forment la progression géométrique

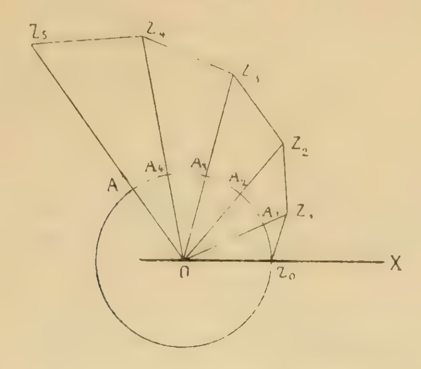
$$1,\quad r,\quad r^2,\quad r^3, \ldots \qquad (1)$$

et les arguments sont les termes de la progression arithmétique

$$0,\quad \theta,\quad 2\theta,\quad 3\theta, \ldots. \qquad (2)$$

Les progressions (1) et (2) définissent un système de loga-

Fig. 9



rithmes; donc si ρ et ω désignent deux termes correspondants et a la base des logarithmes, on peut écrire

$$\omega = \log_a \rho, \quad \rho = a^{\omega}. \tag{3}$$

Mais ω et ρ sont les coordonnées polaires de l'un quelconque des points $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ et l'équation (3) représente une courbe appelée *spirale logarithmique* ou *spirale équiangle*. Donc la ligne polygonale $Z_0Z_1Z_2Z_3$ . . est inscriptible à une spirale logarithmique.

La ligne brisée $Z_0Z_1Z_2Z_3 \ldots$ porte le nom de *myosotis*. Les angles $Z_0Z_1Z_2$, $Z_1Z_2Z_3$, ... sont égaux entre eux, et les côtés Z_0Z_1, Z_1Z_2, Z_2Z_3, ... sont en progression géométrique.

Si $r = 1$, les affixes des puissances successives de z sont les sommets d'une ligne brisée régulière $Z_0A_1A_2A_3 \ldots$

24. Théorème. — *Si dans un polynome entier en* x *à coefficients réels, on remplace* x *successivement par deux imaginaires conjuguées, les résultats sont des imaginaires conjuguées.*

Considérons d'abord un monome Ax^m. On a

$$\begin{aligned}&(a + bi)^m \\ &= a^m + C_m^1 a^{m-1}bi - C_m^2 a^{m-2}b^2 - C_m^3 a^{m-3}b^3 i + C_m^4 a^{m-4}b^4 + \ldots \\ &= (a^m - C_m^2 a^{m-2}b^2 + C_m^4 a^{m-4}b^4 \ldots) + bi(C_m^1 a^{m-1} - C_m^3 a^{m-3}b^2 \ldots).\end{aligned}$$

Ce résultat est de la forme $P + Qbi$, P et Q désignant des polynomes qui ne renferment que des puissances paires de b. On en déduit en changeant b en $- b$:

$$(a - bi)^m = P - Qbi.$$

Par conséquent, si A désigne un nombre réel, les valeurs de

Ax^m, pour $x = a \pm bi$, sont imaginaires conjuguées (ou réelles et égales entre elles).

Considérons ensuite une fonction entière à coefficients réels. Si l'on y remplace x successivement par $a + bi$ et par $a - bi$, chaque terme de la fonction donne deux imaginaires conjuguées ; donc, etc.

Corollaire. Le théorème subsiste également pour le quotient de deux fonctions entières à coefficients réels.

Extraction des racines.

25. Théorème. — *Tout nombre* (autre que zéro) *a* m *racines* m^es *distinctes.*

Soit $z = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ une racine m^e de l'imaginaire $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; nous devrons avoir $z^m = a$ ou (**22**)

$$r'^m(\cos m\theta' + i\sin m\theta') = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Cette égalité exige (**8**, Remarque)

$$r'^m = r, \quad m\theta' = \theta + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque ; par suite

$$r' = r^{\frac{1}{m}}, \quad \theta' = \frac{\theta + 2k\pi}{m},$$

où $r^{\frac{1}{m}}$ désigne la racine m^e *arithmétique* de r.

On peut donc écrire

$$\sqrt[m]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right). \quad (1)$$

Cette formule donne pour $\sqrt[m]{a}$ m valeurs distinctes, si l'on y fait successivement

$$k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, m-1; \quad (2)$$

en effet, l'argument $\frac{\theta + 2k\pi}{m}$ prend les valeurs

$$\frac{\theta}{m}, \quad \frac{\theta}{m} + \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{\theta}{m} + \frac{4\pi}{m}, \ldots \frac{\theta}{m} + \frac{2(m-1)\pi}{m}, \quad (3)$$

et deux quelconques des arcs (3) ayant une différence moindre que 2π, ne peuvent avoir à la fois le même sinus et le même cosinus. Les autres valeurs de k sont de la forme $mq + k'$, k'

étant l'un des nombres (2) ; les valeurs correspondantes de θ' sont

$$\frac{\theta + 2(mq + k')\pi}{m} = 2q\pi + \frac{\theta + 2k'\pi}{m},$$

et par suite ne diffèrent des arcs (3) que d'un multiple de 2π, de sorte qu'on retombe sur les valeurs précédentes de $\sqrt[m]{a}$.

Remarque. — Les affixes des m valeurs de la racine m^{e} d'un nombre sont les sommets d'un polygone régulier de m côtés.

26. Racines m^{es} de l'unité. — Pour obtenir les racines m^{es} de l'unité, il suffit de faire $r = 1$, $\theta = 0$ dans la formule (1). L'expression de ces racines est donc

$$\rho_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

où on fera $k = 0, 1, 2, \ldots m - 1$. On peut remarquer que $\rho_k = \rho_1^k$, de sorte que les racines m^{es} de l'unité sont

$$1, \quad \rho_1, \quad \rho_1^2, \quad \rho_1^3, \ldots, \quad \rho_1^{m-1}.$$

Remarque. — Si α désigne l'une quelconque des racines m^{es} d'un nombre donné, réel ou imaginaire, ces racines ont pour expression

$$\alpha, \quad \alpha\rho_1, \quad \alpha\rho_1^2, \ldots, \quad \alpha\rho_1^{m-1},$$

où

$$\rho_1 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

27. Généralisation de la formule de Moivre. — La formule (1) du § 25 donne

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\theta + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{m}.$$

En élevant cette égalité à la puissance p on obtient

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{m}} = \cos\frac{p}{m}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{m}(\theta + 2k\pi).$$

Applications de la formule de Moivre.

28. Problème. — *Exprimer* $\cos m\theta$ *et* $\sin m\theta$ *en fonction de* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$.

On a la formule (22)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta.$$

Développons le premier membre et égalons ensuite les parties réelles et les coefficients de i dans les deux membres ; il vient

$$\cos m\theta = \cos^m\theta - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + \ldots$$

$$\sin m\theta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \ldots$$

29. Problème. — *Exprimer* $\cos^m\theta$ *et* $\sin^m\theta$ *en fonction des sinus et des cosinus des multiples de l'angle* θ.

Posons

$$\cos\theta + i\sin\theta = u, \quad \cos\theta - i\sin\theta = v;$$

nous aurons successivement

$$2\cos\theta = u + v, \quad 2i\sin\theta = u - v,$$

$$2^m\cos^m\theta = (u+v)^m = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}u^2v^{m-2} + muv^{m-1} + v^m, \qquad (1)$$

$$2^m i^m \sin^m\theta = (u-v)^m = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2$$

$$\pm \frac{m(m-1)}{1.2}u^2v^{m-2} \mp muv^{m-1} \pm v^m. \qquad (2)$$

1° m est pair. Il y aura un terme du milieu qu'on obtient en faisant $n = \frac{m}{2}$ dans le terme général $C_m^n u^{m-n}v^n$ et qui est par conséquent

$$\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{m}{2}}.$$

En réunissant les termes équidistants des extrêmes, on obtient

$$2^m\cos^m\theta = (u^m + v^m) + \frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2})uv + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4})u^2v^2$$

$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{m}{2}}, \qquad (3)$$

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m\theta = (u^m + v^m) - \frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2})uv + \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}. \quad (4)$$

Mais on a

$$uv = 1, \quad u^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad v^n = \cos n\theta - i \sin n\theta;$$

par suite

$$u^n + v^n = 2\cos n\theta, \quad u^n - v^n = 2i \sin n\theta, \quad (5)$$

et les équations (3) et (4) se ramènent à

$$2^{m-1}\cos^m\theta = \cos m\theta + \frac{m}{1}\cos(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\theta$$

$$\ldots + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}},$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}\sin m\theta = \cos m\theta - \frac{m}{1}\cos(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\theta$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}.$$

2° m est impair. Les seconds membres des formules (1) et (2) renferment deux termes du milieu qu'on obtient en faisant $n = \frac{m \mp 1}{2}$ dans le terme général et qui ont pour somme dans l'égalité (1)

$$\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}(u+v)(uv)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Réunissons encore les termes équidistants des extrêmes :

$$2^m\cos^m\theta = (u^m + v^m) + \frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2})uv + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4})u^2v^2$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}(u+v)(uv)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$2^m i^m\sin^m\theta = u^m - v^m - \frac{m}{1}(u^{m-2} - v^{m-2})uv + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4})u^2v^2$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}(u-v)(uv)^{\frac{m-1}{2}};$$

d'où en tenant compte des relations (5) :

$$2^{m-1}\cos^m\theta = \cos m\theta + \frac{m}{1}\cos(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\theta$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}\cos\theta,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\sin^m\theta = \sin m\theta - \frac{m}{1}\sin(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)\theta$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}\sin\theta.$$

Exercices et notes.

1. Construire les affixes des imaginaires

$\pm 3 \pm i, 5 - \sqrt{-2}, \quad \cos 30^0 \pm i\sin 30^0, \quad 2(\cos 120^0 - i\sin 120^0).$

2. Ramener à la forme trigonométrique

$$\pm 1 \pm i, \quad 1 + \sqrt{-3}, \quad p^2 - q^2 \pm 2pqi.$$

3. Mettre le produit

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\ldots(a_n^2 + b_n^2)$$

sous la forme $A^2 + B^2$.

On identifie $A + Bi$ avec $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \dots (a_n + b_n i)$.

4. Ecrire $(a^2 + b^2)^3$ sous la forme d'une somme de deux carrés.

5. Démontrer que

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

6 Soit $\cos\theta + i\sin\theta$ une racine de l'équation à coefficients réels

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m = 0;$$

démontrer que

$$A_1 \sin\theta + A_2 \sin 2\theta + \dots + A_m \sin m\theta = 0.$$

7. Chercher les sommes

$$C = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + \overline{m - 1}b),$$

$$S = \sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \dots + \sin(a + \overline{m - 1}b).$$

Si l'on fait $\cos b + i\sin b = q$, on trouve

$$C + Si = (\cos a + i\sin a)(1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1})$$

$$= (\cos a + i\sin a)\frac{1 - \cos mb - i\sin mb}{1 - \cos b - i\sin b}$$

$$= (\cos a + i\sin a)\frac{\sin\frac{mb}{2}\left(\cos\frac{mb}{2} + i\sin\frac{mb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}\left(\cos\frac{b}{2} + i\sin\frac{b}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{mb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{m-1}{2}b\right) + i\sin\left(a + \frac{m-1}{2}b\right)\right], \text{etc.}$$

8. Construire les affixes des imaginaires

$$\frac{z + z'}{2}, \quad \pm\sqrt{zz'}, \quad \frac{z + z' + z''}{3}, \quad \frac{mz + nz'}{m + n},$$

m et n étant des nombres réels.

9. Si φ est un angle variable, l'affixe de l'imaginaire $a\cos\varphi + ib\sin\varphi$ décrit une ellipse. Trouver la courbe qui correspond à l'imaginaire

$$z = a\,\mathrm{tg}\,\varphi + ib\,\mathrm{cotg}\,\varphi.$$

10. Trouver la courbe engendrée par l'affixe de l'imaginaire

$$z = a\cos^2\varphi + bi\sin^2\psi,$$

φ et ψ étant deux angles variables liés par la relation

$$\sin^2\varphi + 2\cos^2\psi = \frac{1}{2}.$$

11. Soient Z, Z' les affixes de deux imaginaires variables z, z'. A toute équation $z' = f(z)$ correspond une construction déterminée au moyen de laquelle on déduit de Z le point Z' : cette équation définit une *transformation*.

Etudier les transformations suivantes où a, b désignent des quantités réelles, et α, α', β, des quantités imaginaires :

$z' = z + a$, $z' = z + bi$, $z' = z + \alpha$ (translation) ;

$z' = zi$, $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta)$ (rotation) ;

$z' = az$ (homothétie) ;

$z' = (a + bi)z$ (similitude) ;

$zz' = a$, $zz' = bi$, $zz' = \alpha$ (inversion symétrique) ;

$zz' - \alpha' z - \alpha z + \beta = 0$ (inversion symétrique à deux pôles)

12. Le produit de plusieurs nombres de la forme $a^2 + \lambda b^2$ est un nombre de la même forme. (Euler.)

13. Le produit de plusieurs nombres de la forme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est de la même forme. (Euler.)

Ce théorème résulte de l'identité

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ = (aa' + bb' + cc' + dd')^2 + (ab' - ba' - cd' + dc')^2 \\ + (ac' - ca' + bd' - db')^2 + (ad' - da' - bc' + cb')^2.\end{aligned}$$

Si l'on remplace b, c, d, b', c', d' par

$$b\sqrt{\lambda},\quad c\sqrt{\mu},\quad d\sqrt{\lambda\mu},\quad b'\sqrt{\lambda},\quad c'\sqrt{\lambda},\quad d'\sqrt{\lambda\mu},$$

on obtient un théorème plus général, dû à Lagrange.

14. Exprimer $\cos 7\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 7\theta$ en fonction de $\sin\theta$ (**28**).

15. Chercher les sommes

$$C = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos \overline{m - 1}a,$$

$$S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin \overline{m - 1}a.$$

16. Chercher les sommes

$$C = \cos a + 2\cos 2a + 3\cos 3a + \dots + (m - 1)\cos \overline{m - 1}a,$$

$$S = \sin a + 2\sin 2a + 3\sin 3a + \dots + (m - 1)\sin \overline{m - 1}a.$$

17. z désignant une variable réelle qui prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, et α, α', β, β' représentant des constantes imaginaires, l'affixe de l'imaginaire

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\alpha' z + \beta'}$$

décrit une circonférence.

CHAPITRE II.

DÉTERMINANTS.

Partage des permutations en deux classes.

30. Définitions. — Considérons les permutations des n premiers nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad .., \quad n.$$

Deux éléments d'une telle permutation présentent une *inversion* ou un *dérangement*, quand le plus grand de ces nombres est placé avant l'autre. Une permutation est dite *paire, positive* ou *de la première classe* quand elle a un nombre pair d'inversions; *impaire, négative* ou *de la seconde classe*, si elle en a un nombre impair.

Par exemple, la permutation 35214 qui a six inversions, savoir 32, 31, 52, 51, 54, 21 est paire. La permutation $123 \ldots n$ est rangée dans la première classe.

On appelle *transposition* l'échange de deux éléments d'une permutation. Deux permutations quelconques de n éléments peuvent toujours se ramener l'une à l'autre au moyen d'un certain nombre de transpositions. C'est ainsi qu'on transforme 35214 en 24153 en faisant successivement les transpositions (3, 2), (5, 4), (3, 1), (3, 5), ce qui donne

$$25314, \quad 24315, \quad 24135, \quad 24153.$$

31. Théorème. — *Toute transposition change la classe d'une permutation.*

1° Transposons d'abord deux éléments consécutifs x, y. Soit la permutation $AxyB$, où A désigne l'ensemble des éléments qui précèdent x, et B celui des éléments qui suivent y. La transposition (x, y) introduit ou supprime l'inversion que peuvent présenter x et y, mais elle n'altère pas les autres inversions ou non-inversions de $AxyB$; donc les permutations $AxyB$ et $AyxB$ sont de classes différentes.

2° Transposons maintenant deux éléments x, y qui sont séparés par p élements a_1, a_2, ... a_p. Pour passer de

$$Axa_1a_2 \dots a_p yB \quad \text{à} \quad Aya_1a_2 \dots a_p xB,$$

on peut opérer successivement les transpositions de deux éléments consécutifs :

$$(x, a_1), \quad (x, a_2), \quad (x, a_3), \quad \dots \quad (x, a_p), \quad (x, y),$$
$$(y, a_p), \quad (y, a_{p-1}), \quad (y, a_{p-2}), \quad \dots \quad (y, a_1).$$

Ces transpositions étant au nombre de $2p + 1$, la première permutation aura changé de classe un nombre impair de fois; donc elle a passé à la classe opposée.

32. Corollaires. — I. *Deux permutations sont de la même classe ou non, suivant que l'une se déduit de l'autre par un nombre pair ou impair d'échanges de deux éléments.*

II. *Une permutation est paire ou impaire suivant qu'elle peut se déduire de la permutation* 123... n *au moyen d'un nombre pair ou impair de transpositions.*

Nous avons ainsi un second principe pour classer les permutations.

Exemple : la permutation 35214 résulte de 12345 à la suite des transpositions (1, 3), (2, 5), (1, 2), (4, 1) ; donc elle est paire.

III. *Il existe autant de permutations paires des nombres* 1, 2, 3, ... n *que de permutations impaires*

Car toute permutation paire, par la transposition de deux éléments déterminés a et b, devient impaire et réciproquement.

33. Permutation circulaire. — Si dans une disposition des nombres 1, 2, 3, ... n, on remplace chaque élément par celui qui le suit, et le dernier par le premier, la nouvelle disposition est appelée une *permutation circulaire* ou *tournante* de la première. Les deux dispositions appartiennent à la même classe ou non, suivant que n est impair ou pair ; car on passe de la première à la seconde en échangeant successivement le premier élément avec chacun des suivants. Par exemple on transforme 35421 en 54213 en faisant les transpositions successives (3, 5), (3, 4), (3, 2), (3, 1).

34. Permutations d'éléments quelconques. — Les notions précédentes s'étendent facilement à des éléments désignés d'une manière quelconque.

On considère l'une des permutations comme étant la *permutation principale* ou *initiale*; c'est celle qui assigne aux éléments leur rang ou numéro d'ordre. En remplaçant dans une permutation quelconque chaque élément par ce numéro, on est ramené immédiatement à ce qui précède.

Pour opérer directement, on peut encore appeler *inversion* la combinaison de deux éléments d'une permutation qui sont placés l'un par rapport à l'autre dans un ordre différent de celui de la permutation principale; suivant qu'une permutation présente un nombre pair ou impair d'inversions elle appartiendra à la première ou à la seconde classe. Cette classe résulte aussi du nombre des transpositions qui servent à passer de la permutation principale à la permutation donnée.

Par exemple, si *paris* est la permutation principale, la permutation *raspi* présente les inversions *ra*, *rp*, *ap*, *sp*, *si*; donc elle est impaire. On arrive à la même conclusion en transformant *paris* en *raspi* au moyen des transpositions (p, r), (p, s), (i, p).

Définition d'un déterminant.

35. Définitions. — On nomme *déterminant* de n^2 nombres rangés par lignes et colonnes (*) en tableau carré, la somme algébrique de tous les produits de n facteurs obtenus en prenant un élément et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne, et en affectant chaque produit du signe + ou du signe —, suivant que la permutation formée par les numéros d'ordre des lignes et la permutation formée par les numéros des colonnes auxquelles appartiennent les facteurs de ce produit, sont de même parité ou de parités différentes.

On représente un déterminant en plaçant entre deux barres verticales le tableau de ses éléments.

Considérons, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 6 & \mathbf{5} & 4 & 7 \\ 8 & 9 & -\mathbf{2} & 10 \\ 1 & -13 & 12 & \mathbf{3} \\ \mathbf{22} & 17 & 29 & 15 \end{vmatrix}$$

(*) Les *lignes* du tableau carré sont les lignes tracées dans le sens de l'écriture, et les *colonnes* sont les lignes perpendiculaires aux premières Les lignes et les colonnes se nomment aussi *rangées*.

L'*ordre* d'un déterminant est le nombre des lignes qui le composent.

Un terme de ce déterminant est le produit

$$(-2)\,(22)\,(3)\,(5);$$

ses facteurs appartiennent respectivement aux lignes de rangs 2, 4, 3, 1 et aux colonnes de rangs 3, 1, 4, 2. Les permutations 2431 et 3142 présentant l'une quatre et l'autre trois inversions, le terme considéré est précédé du signe —; il est donc égal à 2.22.3.5.

Pour exposer la théorie des déterminants, nous désignerons les éléments par une même lettre affectée de deux indices dont le premier marque le rang de la ligne, et le second le rang de la colonne de l'élément.

Le déterminant du n^e ordre est alors représenté par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

On appelle *diagonale principale* (ou *descendante*) l'ensemble des *éléments diagonaux* $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$. La *seconde diagonale* (ou *diagonale ascendante*) va de a_{n1} à a_{1n}.

Un élément a_{rs} est dit *pair* ou *impair* suivant que la somme $r + s$ est paire ou impaire; les éléments de la diagonale principale sont pairs. Deux éléments sont dits *conjugués* lorsque leurs indices ne diffèrent que par l'ordre; tels sont a_{rs} et a_{sr}.

36. Formation des termes. — Soient $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ et $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ deux permutations quelconques des nombres 1, 2, 3, ... n. Un terme du déterminant (1) est évidemment

$$T = \varepsilon . a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} a_{\alpha_3\beta_3} \cdots a_{\alpha_n\beta_n},$$

où ε désigne $+1$ ou -1 suivant que les permutations $\alpha_1\alpha_2 .. \alpha_n$ et $\beta_1\beta_2 .. \beta_n$ sont de même parité ou de parités différentes.

Le signe de T *est indépendant de l'ordre des facteurs*. Car un échange de deux facteurs revient à transposer à la fois deux premiers indices et deux seconds indices, de sorte que les deux séries d'indices changent à la fois de classe. Mais par une suite d'échanges de deux facteurs on peut donner aux facteurs de T tel ordre qu'on veut.

Pour simplifier, écrivons les facteurs de T de manière que les premiers indices se suivent dans l'ordre naturel. T prend alors la forme

$$\varepsilon \, . \, a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} a_{3\gamma_3} \ldots a_{n\gamma_n},$$

où $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n$ désigne une permutation des nombres 1, 2, .. n et où $\varepsilon = 1$ ou -1, suivant que cette permutation est paire ou impaire.

On peut donc énoncer la règle suivante :

Le premier terme (terme principal) *d'un déterminant est le produit* $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$. *On en déduit tous les autres en laissant les premiers indices invariables et en permutant les autres de toutes les façons. Chacun des termes ainsi obtenus est précédé du signe + ou du signe —, suivant que la permutation des seconds indices est paire ou impaire, ou suivant qu'elle résulte de la permutation initiale* 12 ... n *par un nombre pair ou impair de transpositions.*

On pourrait aussi laisser invariables les seconds indices du terme principal et permuter de toutes les façons les premiers indices.

L'une et l'autre de ces règles montrent que le *développement* d'un déterminant d'ordre n comprend $n!$ termes.

37. Notation des déterminants — La notation des doubles indices est souvent remplacée par la suivante :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & l_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

Les différents termes du développement résultent alors du terme principal $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ en permutant de toutes les façons possibles soit les lettres $a, b, c, \ldots l$ sans déplacer les indices, soit les indices sans déplacer les lettres; le terme aura le signe + ou le signe —, suivant que la permutation des lettres ou celle des indices présente un nombre pair ou un nombre impair de dérangements.

Les déterminants considérés ci-dessus sont souvent représentés par

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}, \quad \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots l_n.$$

On écrit seulement la première ligne entre deux traits verticaux lorsqu'elle suffit pour faire connaître les autres lignes ; ainsi le déterminant (1) peut être représenté par

$$| a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad \ldots \quad l_1 | .$$

Enfin, lorsque les éléments du déterminant sont caractérisés par deux symboles dont l'un reste constant dans une même ligne et l'autre dans une même colonne, on écrit sur une première ligne les signes distinctifs des colonnes et sur une seconde ligne ceux des lignes. Ainsi le déterminant (1) est dénoté par

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & l \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{vmatrix} ;$$

quand on emploie la notation des doubles indices, on peut représenter le déterminant par

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix} .$$

38. Déterminants du 2e et du 3e ordre. — On a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Pour développer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ,$$

on forme le tableau

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - \quad - \quad - & & & & + \quad + \quad + \end{array}$$

Les termes positifs du déterminant correspondent à trois droites parallèles à la première diagonale du déterminant, et les termes négatifs à trois droites parallèles à la seconde diagonale, de sorte que le développement cherché est

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 .$$

Cette règle est connue sous le nom de *règle de Sarrus*.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES DÉTERMINANTS.

39. Théorème. — *Un déterminant ne change pas quand on écrit les lignes pour les colonnes et réciproquement.*

Appelons D et D' les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

il faut démontrer que D = D'. Or, on passe de D à D' en transposant les deux indices de chaque élément. Donc au terme

$$T = \varepsilon . a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{n\gamma_n}$$

du développement de D correspond, dans le développement de D', le terme

$$T' = \varepsilon . a_{\gamma_1 1} a_{\gamma_2 2} \cdots a_{\gamma_n n}.$$

Mais T' est aussi un terme de D. On en conclut que les deux déterminants sont identiques terme à terme.

Remarque. — On dit que D' est le déterminant D *transposé.*

40. Théorème. — *Lorsqu'on transpose deux rangées parallèles, le déterminant change seulement de signe.*

Appelons D et D' les déterminants

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

qui ne diffèrent que par l'échange des lignes de rangs p et q.

On passe du développement de D à celui de D' en transposant p et q dans la série des premiers indices de chaque terme, de sorte qu'au terme

$$T = \varepsilon . a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{p\gamma_p} \cdots a_{q\gamma_q} \cdots a_{n\gamma_n}$$

de D correspond, dans D', le terme

$$T' = \varepsilon . a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{q\gamma_p} \cdots a_{p\gamma_q} \cdots a_{n\gamma_n}.$$

Mais T' fait partie de D avec le signe opposé, car la permutation formée par les premiers indices de T a changé de classe et celle des seconds indices est restée la même. Ainsi, D et D' sont composés des mêmes termes avec des signes opposés ; par suite $D' = -D$.

41. Corollaire. — *Si l'on permute les lignes d'un déterminant entre elles, et les colonnes entre elles, le déterminant obtenu sera égal au premier ou n'en diffère que par le signe.*

En effet, on peut passer du déterminant primitif au nouveau déterminant par des transpositions de deux rangées parallèles. Donc les deux déterminants sont égaux entre eux ou ne diffèrent que par le signe, suivant que le nombre des transpositions est pair ou impair.

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_3 & a_3 & c_3 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

En particulier, une permutation circulaire effectuée sur les lignes (ou sur les colonnes) n'altère pas un déterminant ou n'en fait que changer le signe suivant que l'ordre est impair ou pair (**33**).

42. Théorème. — *Un déterminant* D *qui a deux rangées parallèles identiques est nul.*

En effet, l'échange de ces rangées laisse D invariable; mais D devrait aussi changer de signe (**40**). Donc $D = -D$, d'où $D = 0$.

43. Application. — Soit le *déterminant de Vandermonde*,

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 & \ldots & b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 & \ldots & c^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & l & l^2 & \ldots & l^{n-1} \end{vmatrix}.$$

formé avec n nombres distincts a, b, c, ... l. Regardons-le comme un polynome en b ; comme il s'annule quand on remplace b par a, il est divisible par $b - a$. On verrait de même

qu'il est divisible par les différences $c - a$, $c - b$, etc.; il est donc divisible par le produit

$$\begin{aligned} P = (b-a)(c-a)(d-a)\,.\,.\,(l-a) \\ (c-b)(d-b)\ldots(l-b) \\ \ldots\ldots\ldots \\ (l-k). \end{aligned}$$

On a même $V = P$; car le produit des premiers termes des facteurs de P est égal à $bc^2 \ldots l^{n-1}$ ou au terme principal de V.

Plus généralement, si $f_1(x)$, $f_2(x)$, … $f_n(x)$ sont des fonctions entières distinctes, et si a, b, … l sont n nombres distincts, le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \ldots & f_n(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & \ldots & f_n(b) \\ f_1(c) & f_2(c) & \ldots & f_n(c) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(l) & f_2(l) & \ldots & f_n(l) \end{vmatrix},$$

est divisible par P. Un tel déterminant est appelé *alternant*.

44. Théorème — *Pour multiplier ou diviser un déterminant par un nombre λ, il suffit de multiplier ou de diviser par λ les éléments d'une rangée.*

Ainsi,

$$\lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Car chaque terme du développement du premier déterminant contient en facteur l'un des nombres a_1, a_2, a_3; donc si on remplace ces nombres par λa_1, λa_2, λa_3, le déterminant est multiplié par λ.

45. Corollaires. — I. *Un déterminant change de signe quand on change les signes des éléments d'une même rangée.*

II. *On peut mettre en évidence devant le déterminant un facteur commun à tous les éléments d'une même rangée.*

Ce principe facilite souvent le calcul d'un déterminant. Soit, par exemple,

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{6}{5} & 7 & \frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} & 12 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}.$$

Divisons la première colonne par 2, ensuite la troisième ligne par 4; puis après avoir réduit les éléments de la première colonne au dénominateur commun 15 et ceux de la troisième au dénominateur 12, mettons en évidence les facteurs $\frac{1}{15}$ et $\frac{1}{12}$. Il vient

$$D = 2 \times 4 \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Mineurs d'un déterminant.

46. Formation des mineurs. — Considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dans le développement de D, réunissons tous les termes qui renferment a_{rs} et mettons-y cet élément en facteur commun; le polynome qui multiplie alors a_{rs} est appelé le *mineur correspondant* à a_{rs} ou *cofacteur* de a_{rs}. Nous le désignerons par A_{rs}.

Cherchons d'abord A_{11}. A cet effet, partons du terme principal

$$a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

et permutons-y de toutes les façons les seconds indices à l'exception de celui de a_{11}, en ayant égard à la règle des signes. Les termes ainsi obtenus, si l'on en supprime le facteur a_{11},

formeront A_{11} ; mais on les obtient également en développant le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Donc, *le mineur* A_{11} *est égal au déterminant qui résulte de* D *par la suppression de la première ligne et de la première colonne.*

Passons au cas général. Pour trouver A_{rs}, échangeons la ligne r successivement avec chacune des $r-1$ précédentes, ce qui multiplie D par $(-1)^{r-1}$; échangeons ensuite la colonne s successivement avec chacune des $s-1$ précédentes, ce qui multiplie le déterminant par $(-1)^{s-1}$. Ces transformations conduisent à un déterminant D' commençant par a_{rs}, et l'on a

$$D' = (-1)^{r-1+s-1} D = (-1)^{r+s} D ;$$

il suffit maintenant de supprimer dans D' la première ligne et la première colonne pour obtenir le mineur de D' qui correspond à a_{rs}. Ce mineur étant égal à $(-1)^{r+s} A_{rs}$, on a la règle :

Le mineur A_{rs} *est égal au déterminant qui résulte de* D *par la suppression des deux rangées qui se croisent sur* a_{rs}, *ce déterminant étant pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que l'élément* a_{rs} *est pair ou impair.*

Soit, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix};$$

le mineur correspondant à c_2 est

$$C_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

47. Propriétés fondamentales des mineurs.

1° *Tout déterminant* D *est égal à la somme des produits des éléments d'une rangée par les mineurs correspondants.*

2° *La somme des produits des éléments d'une rangée par les mineurs homologues relatifs à une rangée parallèle est nulle.*

1° Chaque terme du développement de D contient un élément et un seul de la ligne

$$a_{r1}, \quad a_{r2}, \quad a_{r3}, \quad \ldots \quad a_{rn}.$$

L'ensemble des termes en a_{r1} est représenté par $a_{r1}\,A_{r1}$; de même les termes contenant a_{r2} composent $a_{r2}A_{r2}$, et ainsi de suite.

Tous les termes de D ayant été ainsi pris et chacun d'eux une seule fois, on a

$$D = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}.$$

2° Les mineurs A_{r1}, A_{r2}, ... A_{rn} sont indépendants des éléments de la ligne r; par suite, si ces éléments sont remplacés par ceux d'une ligne parallèle, par exemple par

$$a_{p1}, \quad a_{p2}, \quad \ldots \quad a_{pn},$$

la somme

$$a_{p1}\,A_{r1} + a_{p2}A_{r2} + \ldots + a_{pn}A_{rn}$$

représente le développement d'un déterminant dont les lignes de rangs p et r sont identiques. Cette somme est donc nulle.

Par analogie

$$D = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}\,A_{ns},$$
$$0 = a_{1q}A_{1s} + a_{2q}A_{2s} + \ldots + a_{nq}A_{ns}. \quad (q \neq s)$$

Exemple. — Soit le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

le développement de D suivant la 2ᵉ ligne est

$$-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

48. Corollaires. — I. *Si tous les éléments d'une rangée sont nuls à l'exception d'un seul, le déterminant se réduit au produit de l'élément non nul par le mineur correspondant.*

Par exemple

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

II. *Si les éléments situés d'un côté de la diagonale principale sont tous nuls, le déterminant se réduit au terme diagonal.*

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3.$$

III. *Tout déterminant peut être mis sous la forme d'un déterminant d'ordre plus élevé.* Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

α, β, γ étant des nombres quelconques.

49. Théorème. — *Un déterminant dans lequel chaque élément d'une rangée est la somme de* p *termes, est la somme de* p *déterminants obtenus en remplaçant les éléments de la rangée considérée par les premiers, les seconds, ..., les* p[ièmes] *termes des sommes en question.*

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 + e_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 + e_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 + e_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

En effet, si nous appelons A_1, A_2 A_3 les mineurs relatifs à la première colonne, le déterminant proposé est égal à

$$(a_1 + d_1 + e_1)A_1 + (a_2 + d_2 + e_2)A_2 + (a_3 + d_3 + e_3)A_3,$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3) + (e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3).$$

Or, les trois parenthèses sont les développements des déterminants

$$|\, a_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|\,, \qquad |\, d_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|\,, \qquad |\, e_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|\,;$$

le théorème est donc démontré.

50. Remarques. — I. Si les éléments de la première colonne sont des sommes de p termes, ceux de la seconde des sommes de q termes, etc., on peut appliquer plusieurs fois le théorème.

Par exemple

$$\begin{aligned} |\, a_1 + b_1 \;\; a_1 - b_1 \;\; c_1 \,| &= |\, a_1 \;\; a_1 - b_1 \;\; c_1 \,| + |\, b_1 \;\; a_1 - b_1 \;\; c_1 \,| \\ &= |\, a_1\, a_1\, c_1 \,- \, a_1\, b_1\, c_1 \,+\, b_1\, a_1\, c_1 \,-\, b_1\, b_1\, c_1 \\ &= -2\,|\, a_1 \;\; b_1 \;\; c_1 \,|\,. \end{aligned}$$

II. Si les sommes relatives à une rangée n'ont pas le même nombre de termes, on remplacera par des zéros les termes manquants.

Par exemple, l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & b_1 & c_1 \\ a_2 + x & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

se ramène à

$$x \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

51. Théorème. — *On peut ajouter aux éléments d'une rangée ceux d'une rangée parallèle, multipliés par un nombre quelconque.* (Principe de l'addition des rangées parallèles.)

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

En effet, le second déterminant se décompose ainsi (**49**) :

$$|\, a_1 \quad b_1 \quad c_1 \,| + \lambda \,|\, b_1 \quad b_1 \quad c_1 \,| + \mu \,|\, c_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|\,,$$

et les deux derniers déterminants sont nuls (**42**).

Exemple. — Calculer l'alternant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

Soustrayons la première ligne de chacune des autres ; il vient

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ba+a^2 \\ 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}.$$

Si l'on soustrait encore la première ligne de la deuxième, on obtient

$$D = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

On arrive plus rapidement à ce résultat en observant que D s'annule quand on remplace a par b, ou b par c, ou c par a ; donc

$$D = (b-a)(c-a)(c-b)m,$$

m étant un facteur inconnu. Pour obtenir le terme diagonal bc^3, il faut que m renferme un terme c ; comme le développement de D est une fonction homogène du 4ᵉ degré en a, b, c qui ne fait que changer de signe quand on échange deux des lettres a, b, c et que la dernière propriété appartient également au produit $(b-a)(c-a)(c-b)$, m doit être une fonction homogène et symétrique du premier degré. Par conséquent, $m = a+b+c$.

Multiplication des déterminants.

52. Théorème. — *Le produit de deux déterminants d'ordre* n *est un déterminant d'ordre* n *dont les différents éléments s'obtiennent en multipliant une ligne quelconque du premier des déterminants donnés par une ligne quelconque du second* (*).

Considérons, par exemple, les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

(*) Multiplier deux lignes, c'est faire la somme des produits des éléments correspondants des deux lignes.

et posons

$$P = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix};$$

il faut démontrer que $P = D\Delta$.

Pour abréger le langage, appelons *file* de P l'ensemble des termes placés sur une même verticale.

On peut décomposer P en 27 *déterminants partiels* (**50**, I) ayant pour colonnes une file quelconque de la première colonne de P, une file quelconque de la seconde et une file quelconque de la troisième.

Ceux de ces déterminants partiels qui comprennent deux files de même rang des colonnes de P, sont nuls; par exemple

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ceux qui sont formés avec trois files de rangs différents contiennent D en facteur. Tel est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\gamma_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^i\alpha_1\gamma_2\beta_3 . D,$$

i désignant le nombre des transpositions qui ramènent la permutation *acb* à *abc*. Mais le même nombre *i* de transpositions ramène la permutation $\alpha\gamma\beta$ à $\alpha\beta\gamma$; par conséquent, $(-1)^i\alpha_1\gamma_2\beta_3$ est un terme du développement de Δ. On en conclut que les déterminants partiels de P qui ne sont pas nuls, sont égaux aux produits de D par les différents termes du développement de Δ; leur somme est donc égale à $D\Delta$.

53. Remarques. — I. Si l'on transpose (**39**) l'un des déterminants D, Δ ou les deux, on voit que leur produit peut s'effectuer en multipliant :

les lignes de D par les lignes de Δ,
ou » » » » colonnes »,
ou » colonnes » » lignes »,
ou » » » » colonnes ».

II Pour multiplier deux déterminants d'ordres différents, on les ramène au même ordre soit en élevant celui d'ordre inférieur (**48**, III), soit en abaissant celui d'ordre supérieur.

L'exemple suivant montrera comment on abaisse l'ordre d'un déterminant. Considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

où les nombres a, b, c sont supposés différents de zéro. Multiplions les deux dernières colonnes par a ; D sera multiplié par a^2. Retranchons ensuite de la 2e colonne la 1re multipliée par b, et de la 3e colonne la 1re multipliée par c ; nous aurons

$$D = \frac{1}{a^2}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & ab' - a'b & ac' - a'c \\ a'' & ab'' - a''b & ac'' - a''c \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} ab' - a'b & ac' - a'c \\ ab'' - a''b & ac'' - a''c \end{vmatrix}.$$

III. Le produit de plusieurs déterminants ainsi qu'une puissance quelconque d'un déterminant peuvent se mettre sous la forme d'un déterminant.

54. Application à l'aire d'un triangle. — Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (X_1, Y_1) . . les coordonnées des sommets de deux triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ rapportés à deux axes rectangulaires.

Si A et B désignent les aires de ces triangles (*), on a

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad 2B = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix};$$

ou encore

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad 2B = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & X_1 & Y_1 \\ 1 & 0 & X_2 & Y_2 \\ 1 & 0 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix}.$$

(*) On démontre, en géométrie analytique, que

$$2A = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3;$$

le second membre est bien le développement du déterminant $| 1 \; x_1 \; y_1 |$.

Cette formule donne à l'aire $A_1A_2A_3$ le signe + ou le signe — suivant qu'un observateur en parcourant successivement Ox et A_1A_2 voit du même côté (à sa droite ou à sa gauche) respectivement l'axe Oy et l'aire $A_1A_2A_3$ ou qu'il les voit de côtés différents.

En multipliant membre à membre on trouve

$$4AB = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1X_1 + y_1Y_1 & x_1X_2 + y_1Y_2 & x_1X_3 + y_1Y_3 \\ 1 & x_2X_1 + y_2Y_1 & x_2X_2 + y_2Y_2 & x_2X_3 + y_2Y_3 \\ 1 & x_3X_1 + y_3Y_1 & x_3X_2 + y_3Y_2 & x_3X_3 + y_3Y_3 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les trois dernières lignes par -2, puis divisons la première colonne par -2; le déterminant sera multiplié par 4. Ajoutons maintenant aux trois dernières colonnes la première multipliée, respectivement, par $X_1^2 + Y_1^2$, $X_2^2 + Y_2^2$, $X_3^2 + Y_3^2$; de même, ajoutons aux trois dernières lignes la première après l'avoir multipliée, respectivement, par $x_1^2 + y_1^2$, $x_2^2 + y_2^2$, $x_3^2 + y_3^2$. Si d_{rs} désigne le carré de la distance A_rB_s, on aura finalement

$$16AB = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

Faisons coïncider $B_1B_2B_3$ avec $A_1A_2A_3$ et posons $A_2A_3 = a$, $A_3A_1 = b$, $A_1A_2 = c$; la formule précédente devient

$$16A^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{aligned} 16A^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c). \end{aligned}$$

55. Théorème. — *Etant donnés deux tableaux rectangulaires de nombres,* T *et* T', *comprenant* n *lignes et* m *colonnes, formons le déterminant* P *dont les éléments sont les produits d'une ligne quelconque de* T *par une ligne quelconque de* T'. *Si* m > n, P *est égal à la somme des produits d'un déterminant formé de* n *colonnes quelconques de* T, *par le déterminant formé des colonnes homologues de* T'. *Si* m < n, P *est nul.*

1. Soient, pour fixer les idées,

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{Vmatrix}.$$

les tableaux T et T'; alors

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix},$$

où

$$p_{11} = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + d_1\delta_1,$$
$$p_{12} = a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 + d_1\delta_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Nous allons démontrer que

$$\left.\begin{aligned} P = |\,a_1\ b_1\ c_1\,| \times |\,\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\,| + |\,a_1\ b_1\ d_1\,| \times |\,\alpha_1\ \beta_1\ \delta_1\,| \\ + |\,a_1\ c_1\ d_1\,| \times |\,\alpha_1\ \gamma_1\ \delta_1\,| + |\,b_1\ c_1\ d_1\,| \times |\,\beta_1\ \gamma_1\ \delta_1\,| \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

A cet effet, décomposons le déterminant P en divers *déterminants partiels* en réduisant chaque colonne à une seule file. Les déterminants qui comprennent deux files occupant le même rang dans les colonnes de D, sont nuls. Les déterminants partiels qui sont composés de trois files de rangs différents, sont égaux à l'un des déterminants

$$|\,a_1\ b_1\ c_1\,|,\quad |\,a_1\ b_1\ d_1\,|,\quad |\,a_1\ c_1\ d_1\,|,\quad |\,b_1\ c_1\ d_1\,|,$$

multiplié par un terme du déterminant correspondant de la suite :

$$|\,\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\,|,\quad |\,\alpha_1\ \beta_1\ \delta_1\,|,\quad |\,\alpha_1\ \gamma_1\ \delta_1\,|,\quad |\,\beta_1\ \gamma_1\ \delta_1\,|.$$

De là on conclut aisément l'égalité (1).

2. Considérons, en second lieu, les tableaux

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right\|,\qquad \left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}\right\|.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

est égal à zéro; car on peut le considérer comme le produit des déterminants nuls $|\,a_1\ b_1\ 0\,|$, $|\,\alpha_1\ \beta_1\ 0\,|$.

56. Application. — Appliquons le théorème (**55**) aux systèmes égaux

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \end{matrix}\right\|,\qquad \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \end{matrix}\right\|.$$

Alors

$$P = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + \dots + l_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + \dots + l_1l_2 \\ a_2a_1 + b_2b_1 + \dots + l_2l_1 & a_2^2 + b_2^2 + \dots + l_2^2 \end{vmatrix};$$

par conséquent

$$(a_1^2 + b_1^2 + \dots + l_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + \dots + l_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + \dots + l_1l_2)^2$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + \dots + (k_1l_2 - k_2l_1)^2.$$

Cette égalité est appelée *identité de Lagrange.*

Théorème de Laplace.

57. Déterminants partiels. — Etant donné un déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

considérons les lignes de rangs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \dots, \quad \alpha_i \qquad (i < n)$$

et les colonnes de rangs

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \dots, \quad \beta_i;$$

les éléments de ces lignes et de ces colonnes qui restent après suppression des autres lignes et des autres colonnes appartiennent à un nouveau déterminant, d'ordre i, qu'on appelle *déterminant partiel* ou *sous-déterminant* de D. En le désignant par δ on a

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1\beta_i} \\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2\beta_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha_i\beta_1} & a_{\alpha_i\beta_2} & \dots & a_{\alpha_i\beta_i} \end{vmatrix};$$

on peut le représenter sans ambiguité par le symbole

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i \end{vmatrix}.$$

Soient

$$\alpha_{i+1}, \quad \alpha_{i+2}, \quad \dots \quad \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta_{i+1}, \quad \beta_{i+2}, \quad \dots \quad \beta_n$$

les rangs des lignes et ceux des colonnes qui n'entrent pas dans δ ; les éléments communs à ces lignes et à ces colonnes appartiennent à un autre déterminant partiel δ', qu'on appelle le *complémentaire* de δ et qu'on peut représenter par le symbole

$$\begin{vmatrix} \beta_{i+1} & \beta_{i+2} & \cdots & \beta_n \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Les combinaisons $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i$, $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_i$, $\alpha_{i+1} \ldots \alpha_n$, $\beta_{i+1} \ldots \beta_n$ sont supposées *ordonnées*; autrement dit, elles ne présentent pas d'inversion.

58. Lemme. — *Etant donné un déterminant* D *d'ordre* n, *soit* δ *le déterminant partiel formé avec les éléments communs aux* i *premières lignes et aux* i *premières colonnes, et soit* δ' *le sous-déterminant complémentaire de* δ *: le produit* $\delta\delta'$ *fait partie du développement de* D.

Considérons parmi les termes de D ceux qu'on déduit du terme principal

$$a_{11}a_{22} \ldots a_{ii}a_{kk} \ldots a_{nn} \qquad (k = i + 1)$$

en remplaçant la suite des seconds indices de la partie $a_{11}a_{22} \ldots a_{ii}$ par une permutation quelconque $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_i$ de ces indices, et aussi la suite des seconds indices de la partie restante $a_{kk} \ldots a_{nn}$ par une permutation quelconque $\gamma_k \ldots \gamma_n$ des mêmes indices $k, k+1, \ldots n$. Soient ν le nombre des inversions de la permutation $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_i$, et ν' celui des inversions de $\gamma_k \ldots \gamma_n$; $\nu + \nu'$ sera celui des inversions de $\gamma_1 \ldots \gamma_i\gamma_k \ldots \gamma_n$. La somme des termes considérés de D sera donc

$$\Sigma(-1)^{\nu+\nu'}a_{1\gamma_1} \ldots a_{i\gamma_i}a_{k\gamma_k} \ldots a_{n\gamma_n}$$

ou

$$\Sigma(-1)^{\nu}a_{1\gamma_1} \ldots a_{i\gamma_i} \times \Sigma(-1)^{\nu'}a_{k\gamma_k} \ldots a_{n\gamma_n}.$$

Or,

$$\delta = \Sigma(-1)^{\nu}a_{1\gamma_1} \ldots a_{i\gamma_i}, \quad \delta' = \Sigma(-1)^{\nu'}a_{k\gamma_k} \ldots a_{n\gamma_n};$$

le lemme est donc démontré.

59. Théorème de Laplace. — *Etant donné un déterminant* D *d'ordre* n, *partageons les lignes en deux groupes,* G *et* G', *comprenant respectivement* i *et* n − i *lignes. Soit* δ *un déterminant partiel formé avec les éléments communs aux lignes de* G *et à* i *colonnes quelconques de* D, *et soit* δ' *le complémentaire*

de δ. *Si* m *désigne la somme des rangs des lignes et des colonnes de* D *qui entrent dans* δ, *on a*

$$D = \Sigma(-1)^m \delta\delta'.$$

Soient, respectivement,

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_i),\quad (\alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \ldots\ \alpha_n),\quad \text{où } k = i+1,$$

les rangs des lignes du groupe G, et ceux des lignes du groupe G'. Ces nombres α sont donnés et restent invariables.

Formons le déterminant partiel δ dont les éléments appartiennent à la fois aux lignes G et aux colonnes de D de rangs

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_i,$$

et un autre déterminant partiel δ' avec les éléments communs aux lignes G' et aux colonnes de D qui n'entrent pas dans δ; nous désignons les rangs de ces dernières colonnes par

$$\beta_k,\ \beta_{k+1},\ \ldots\ \beta_n.$$

δ et δ' sont des sous-déterminants complémentaires.

Démontrons d'abord que le produit $\delta\delta'$, pris avec un signe convenable, fait partie du développement de D. A cet effet, observons que par des transpositions de deux rangées parallèles on peut donner aux lignes de D l'ordre $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i\alpha_k \ldots \alpha_n$ (*) et aux colonnes l'ordre $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_i\beta_k \ldots \beta_n$. Le nouveau déterminant D', qu'on peut représenter par

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_i & \beta_k & \ldots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i & \alpha_k & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix},$$

est égal à + D ou à — D, suivant que son terme principal

$$a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \ldots a_{\alpha_n\beta_n}$$

fait partie de D avec le signe + ou avec le signe —; ce signe est celui de $(-1)^{\mu+\mu'}$, μ et μ' désignant respectivement les nombres des dérangements que présentent les permutations

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i\alpha_k \ldots \alpha_n,\quad \beta_1\beta_2 \ldots \beta_i\beta_k \ldots \beta_n.$$

(*) Cela veut dire que la ligne qui occupait le rang α_1 devient la première, celle qui occupait le rang α_2 devient la seconde, etc.

Or, les combinaisons $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i$ et $\alpha_k \ldots \alpha_n$ ne présentent elles-mêmes aucun dérangement. Mais les éléments de $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i$ forment avec ceux de $\alpha_k\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ respectivement

$$\alpha_1 - 1, \quad \alpha_2 - 2, \quad \ldots \quad \alpha_i - i$$

inversions; car la seconde combinaison renferme tous les nombres plus petits que α_1, tous les nombres plus petits que α_2 à l'exception de α_1, tous les nombres plus petits que α_3 à l'exception de α_1 et α_2, etc. Il résulte de là et par analogie que

$$\mu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i) - (1 + 2 + \ldots + i);$$

$$\mu' = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_i) - (1 + 2 + \ldots + i);$$

donc si l'on pose

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_i = m,$$

on a

$$\mu + \mu' = m - 2(1 + 2 + \ldots + i), \quad (-1)^{\mu+\mu'} = (-1)^m.$$

Par conséquent $D' = (-1)^m D$.

Cela posé, le développement de D' (**58**) comprend le produit des déterminants partiels

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \alpha_i \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i \end{vmatrix} = \delta, \quad \begin{vmatrix} \beta_k & \ldots & \beta_n \\ \alpha_k & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = \delta'.$$

Donc une partie du développement de D est égale à

$$(-1)^m \delta\delta'.$$

Mais si l'on remplace la combinaison $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_i$ successivement par toutes les combinaisons des nombres $1, 2, \ldots n$ pris i à i, on aura, sans omission ni répétition, tous les termes de D. Par suite

$$D = \Sigma(-1)^m \delta\delta'.$$

Par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

est égal à

$$\left| - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \right| .$$

Remarque. — La quantité $(-1)^m \delta'$ est appelée le *cofacteur* de δ.

60. Corollaires. — I. *Si les éléments communs à* i *lignes et à* n — i *colonnes sont nuls, le déterminant se réduit au produit de deux déterminants.* Par exemple

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} .$$

Réciproquement, le produit de deux déterminants dont les ordres sont respectivement p et q, peut se mettre sous la forme d'un déterminant d'ordre $p + q$.

II *Si les éléments communs à* i *lignes et à plus de* n — i *colonnes sont nuls, le déterminant est identiquement nul.*

Remarque. — Le théorème (**59**) généralise la première propriété des mineurs (**47**). On généralise la seconde en remplaçant une ou plusieurs lignes du groupe G′ par un nombre égal de lignes du groupe G pour composer les déterminants partiels désignés ci-dessus par δ'.

Déterminants adjoints.

61. Définition. — Soient $A_{11}, A_{12}, \ldots$ les mineurs du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Ces mineurs sont les éléments d'un nouveau déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

qui est appelé le *déterminant adjoint* ou le *réciproque* de D.

62. Théorème. — *Le réciproque d'un déterminant* D *d'ordre* n *est égal à* D^{n-1}.

En effet, si l'on applique à D et D' la règle de la multiplication (**52**) en tenant compte des propriétés des mineurs (**47**), on trouve

$$DD' = \begin{vmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix} = D^n,$$

d'où $D' = D^{n-1}$.

63. Théorème. — *Soit* D' *le réciproque d'un déterminant* D, *d'ordre* n. *Un déterminant partiel, d'ordre* i, *de* D' *est égal au produit de* D^{i-1} *par le cofacteur du déterminant partiel correspondant de* D.

Considérons, par exemple, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Un déterminant partiel du réciproque D' de D est

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix};$$

nous le mettons sous la forme (**60**, I) :

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

En faisant le produit des déterminants (1) et (2) on trouve (**47**)

$$D\delta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & D & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & D & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = D^3 \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

ou

$$\delta = D^2 \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Lorsqu'il s'agit d'un déterminant partiel de D′ dont les rangées ont des rangs quelconques, on permute d'abord les lignes et les colonnes de D′ de manière que celles qui entrent dans le déterminant partiel considéré, deviennent les premières; on dispose ensuite les rangées de D dans le même ordre que les rangées homologues de D′: ce qui change D en $(-1)^m D$, m ayant la signification indiquée (52). La démonstration s'achève alors comme ci-dessus.

64. Corollaire. — Soient A'_{11}, A'_{12} ... les mineurs du réciproque D′ d'un déterminant D, d'ordre n. Le théorème précédent donne

$$A'_{11} = D^{n-2} a_{11}, \quad A'_{12} = D^{n-2} a_{12}, \ldots$$

Donc, *les mineurs de* D′ *sont proportionnels aux éléments correspondants de* D.

65. Propriétés des déterminants nuls. — I. D'après les théorèmes (**63**) et (**64**), *lorsqu'un déterminant est nul, son réciproque* D′ *et tous les déterminants partiels de* D′ *sont nuls.*

II. Supposons que D soit nul sans que tous ses mineurs soient nuls. Alors en appliquant la propriété précédente aux déterminants partiels qui se déduisent des deux lignes

$$\begin{matrix} A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & \ldots & A_{rn} \\ A_{s1} & A_{s2} & A_{s3} & \ldots & A_{sn} \end{matrix}$$

on trouve les proportions

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{r2}}{A_{s2}} = \frac{A_{r3}}{A_{s3}} = \ldots = \frac{A_{rn}}{A_{ns}}.$$

Donc : *Lorsqu'un déterminant est nul, les mineurs relatifs aux éléments d'une rangée sont proportionnels aux mineurs relatifs aux éléments homologues d'une rangée parallèle.*

III. *Pour qu'un déterminant* D *soit nul, il faut et il suffit qu'il existe une même relation linéaire homogène entre les éléments de chaque ligne.*

Nous ne considérons que le cas où les mineurs de D ne sont pas tous nuls ; par exemple, quelques-un des mineurs A_{r1}, A_{r2}, ... sont différents de zéro.

La condition est nécessaire ; car d'après la propriété des mineurs (**47**), si $D = 0$, on a

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots n)$$

même pour $r = s$. Elle est suffisante ; en effet, si

$$\lambda_1 a_{r1} + \lambda_2 a_{r2} + \dots + \lambda_n a_{rn} = 0 \;(^*) \qquad (1)$$

pour $r = 1, 2, \dots n$, multiplions la première colonne par λ_1 et ajoutons-y les suivantes multipliées respectivement par λ_2, λ_3, ... λ_n ; les nouveaux éléments de la première colonne étant nuls en vertu des relations (1), on a nécessairement $D = 0$.

Déterminants bordés.

66. Définitions. — Etant donné un déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

on a souvent à considérer un autre déterminant de la forme

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n & 0 \end{vmatrix}.$$

(*) Quelques-un des nombres λ pourraient être nuls ; nous supposons ici λ_1 différent de zéro.

On dit que D' est le déterminant D bordé d'une ligne et d'une colonne ; nous le représentons par $(D_{x'}^{x})$.

Le déterminant D peut être *doublement bordé* :

$$(D_{x'y'}^{xy}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n & y_n \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n & 0 & 0 \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

il peut être *triplement bordé*, etc.

67. Théorème. — *Soient* A_{11}, A_{12}, ... *les mineurs d'un déterminant* D *d'ordre* n. *On a*

$$(D_{x'}^{x}) = -\Sigma A_{rs} x_r x'_s, \qquad (1)$$

r *et* s *recevant successivement toutes les valeurs* 1, 2, 3, ... n.

Si on développe $(D_{x'}^{x})$ suivant les éléments de la dernière colonne, et qu'on appelle B_1, B_2, ... B_n ses mineurs se rapportant à x_1, x_2, ... x_n, on obtient

$$(D_{x'}^{x}) = x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_r B_r + \dots + x_n B_n.$$

Désignons par D_r le déterminant qu'on déduit de D en remplaçant la r^e ligne de D par la suite x'_1, x'_2, ... x'_n. On a $B_r = -D_r$; car si l'on échange dans $(D_{x'}^{x})$ la r^e ligne et la dernière, x_r devient le dernier élément et le mineur correspondant est alors égal à D_r, mais $(D_{x'}^{x})$ a été multiplié par — 1.

On peut donc écrire

$$(D_{x'}^{x}) = -(x_1 D_1 + x_2 D_2 + \dots + x_r D_r + \dots + x_n D_n). \qquad (2)$$

Or

$$D_r = x'_1 A_{r1} + x'_2 A_{r2} + \dots + x'_s A_{rs} + \dots + x'_n A_{rn}; \qquad (3)$$

en substituant cette valeur et les valeurs analogues de D_1, D_2, ... on trouve la formule (1).

68. Corollaire. — *Si le déterminant* D *est nul sans que tous ses mineurs soient nuls, le déterminant bordé* $(D_{x'}^{x})$ *est ~~nul~~ produit de deux facteurs linéaires.*

En effet, si $D = 0$, on a (65, I)

$$\frac{A_{r1}}{A_{11}} = \frac{A_{r2}}{A_{12}} = \frac{A_{r3}}{A_{13}} = \ldots = \frac{A_{rn}}{A_{1n}},$$

d'où, en désignant ces rapports par k_r :

$$A_{r1} = k_r A_{11}, \quad A_{r2} = k_2 A_{12}, \quad A_{r3} = k_r A_{13}, \quad \ldots$$

Les égalités (3) et (2) du § précédent donnent alors

$$D_r = -k_r(x'_1 A_{11} + x'_2 A_{12} + \ldots + x'_n A_{1n}) = -k_r D_1,$$

$$(D^{x}_{x'}) = -D_1(x_1 k_1 + x_2 k_2 + \ldots + x_n k_n).$$

Remplaçons les quantités k par les valeurs

$$k_1 = \frac{A_{11}}{A_{11}}, \quad k_2 = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \quad k_3 = \frac{A_{31}}{A_{11}}, \ldots;$$

il vient

$$(D^{x}_{x'}) = -\frac{1}{A_{11}}(x'_1 A_{11} + x'_2 A_{12} + \ldots + x'_n A_{1n})(x_1 A_{11} + x_2 A_{21} + \ldots + x_n A_{n1}).$$

69. Un déterminant doublement bordé $(D^{xy}_{x'y'})$ donne lieu à une remarque curieuse et utile, quand on applique le théorème (**63**).

Les mineurs de ce déterminant qui correspondent aux éléments du carré final $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ sont les déterminants simplement bordés

$$(D^{y}_{y'}), \quad -(D^{x}_{y'}), \quad -(D^{y}_{x'}), \quad (D^{x}_{x'});$$

ils forment le déterminant partiel du réciproque de $(D^{xy}_{x'y'})$:

$$\begin{vmatrix} (D^{y}_{y'}) & -(D^{x}_{y'}) \\ -(D^{y}_{x'}) & (D^{x}_{x'}) \end{vmatrix} = (D^{y}_{y'})(D^{x}_{x'}) - (D^{x}_{y'})(D^{y}_{x'}),$$

et le cofacteur du déterminant partiel correspondant de $(D^{xy}_{x'y'})$ est précisément D. Donc

$$(D^{y}_{y'})(D^{x}_{x'}) - (D^{x}_{y'})(D^{y}_{x'}) = D(D^{xy}_{x'y'}).$$

Déterminants symétriques.

70. Un déterminant est dit *symétrique* lorsque tout élément a_{rs} est égal à son conjugué a_{sr}.

On voit aisément que les mineurs A_{rs}, A_{sr} d'un tel déterminant sont égaux, donc *le réciproque d'un déterminant symétrique est lui-même symétrique.*

Soit D un déterminant symétrique nul. On a (**65**, I)

$$\frac{A_{11}}{A_{1r}} = \frac{A_{r1}}{A_{rr}}, \quad \text{d'où} \quad A_{1r} = A_{r1} = \sqrt{A_{11}A_{rr}}, \tag{1}$$

le radical étant pris avec un signe convenable.

Si l'on borde le déterminant symétrique nul d'une colonne et d'une ligne, la relation (**68**)

$$A_{11}(D^{x}_{x'}) = -(x'_1A_{11} + x'_2A_{12} + \ldots + x'A_{1n})(x_1A_{11} + x_2A_{21} + \ldots + x_nA_{n1}),$$

à cause des égalités (1), prend la forme

$$(D^{x}_{x'}) = -(x'_1\sqrt{A_{11}} + x'_2\sqrt{A_{22}} + \ldots + x'_n\sqrt{A_{nn}})(x_1\sqrt{A_{11}} + x_2\sqrt{A_{22}} + \ldots + x_n\sqrt{A_{nn}});$$

les radicaux ont respectivement les signes de A_{11}, $A_{12}, \ldots$, A_{1n}.

En particulier, si $x'_r = x_r$, on a

$$(D^{x}_{x}) = -(x_1\sqrt{A_{11}} + x_2\sqrt{A_{22}} + \ldots + x_n\sqrt{A_{nn}})^2.$$

71. Déterminants symétriques gauches. — Un déterminant est dit *symétrique gauche* lorsque les éléments conjugués sont égaux et de signes contraires et que les éléments diagonaux sont nuls. Tels sont les déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

Tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul ; car si on multiplie chaque colonne par -1, on obtient le déterminant transposé, et comme le déterminant proposé change seulement de signe, il est égal à zéro.

Etant donné un déterminant symétrique gauche, les mineurs relatifs à deux éléments conjugués sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires, suivant que l'ordre du déterminant est impair ou pair. En effet, on passe de A_{rs} à A_{sr} en transposant A_{rs} et multipliant ses colonnes par -1.

Tout déterminant symétrique gauche d'ordre pair est le carré d'une fonction rationnelle des éléments. Pour plus de facilité, nous considérons un tel déterminant sous la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -x_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

avec les hypothèses $a_{11} = a_{22} \dots = a_{nn} = 0$, $a_{rs} = -a_{sr}$. Posons

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et appelons A_{11}, A_{12}, ... les mineurs de D; comme D est symétrique gauche et d'ordre impair, il est nul. En appliquant une propriété des déterminants symétriques nuls, bordés d'une ligne et d'une colonne (**70**), on trouve

$$\Delta = -(D_x^x) = (x_1\sqrt{A_{11}} + x_2\sqrt{A_{22}} + \dots + x_n\sqrt{A_{nn}})^2.$$

Mais A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn} sont des déterminants gauches d'ordre $n-1$; donc si le théorème est vrai pour l'ordre $n-1$, il est vrai également pour l'ordre $n+1$. Or, le déterminant gauche du second ordre est de la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2;$$

donc la proposition est démontrée.

Exercices et notes.

1. Le nombre total de dérangements contenus dans toutes les permutations de n éléments est égal à $\frac{1}{2}C_n^2 P_n$.

2. Les permutations $a_1a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_q$, $b_1 b_2 \dots b_q a_1 a_2 \dots a_p$ sont de la même classe ou non, suivant que $(-1)^{pq}$ est positif ou négatif.

3. Dans le déterminant du 5e ordre, trouver les signes des termes

$$a_{43}a_{25}a_{14}a_{51}a_{32}, \quad a_{23}a_{14}a_{35}a_{42}a_{51}, \quad a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}.$$

4. Trouver le signe du terme qui correspond à la seconde diagonale d'un déterminant d'ordre n. Réponse : celui de $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

5. Trouver la valeur numérique du déterminant (*carré magique*)

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

6. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+m & b+m & c+m \\ a+n & b+n & c+n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ a+n\alpha & b+n\beta & c+n\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

7. Si $a + a' + b + b' + c + c' = 0$, on a

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}(a+a') & \operatorname{tg}(a+b') & \operatorname{tg}(a+c') \\ \operatorname{tg}(b+a') & \operatorname{tg}(b+b') & \operatorname{tg}(b+c') \\ \operatorname{tg}(c+a') & \operatorname{tg}(c+b') & \operatorname{tg}(c+c') \end{vmatrix} = 0.$$

Développer D et remplacer chaque terme par la somme de ses facteurs.

8.
$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

9.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

10.
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Ajouter à la 1re colonne les autres multipliées par 1, 1, 1 ou par 1, — 1, — 1, etc.

11.
$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = 4abc.$$

Le déterminant s'annule pour $a=0$, pour $b=0$, pour $c=0$, etc.

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz.$$

13 $$\begin{vmatrix} b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ca & a^2 \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix} = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab).$$

Si l'on divise les lignes du déterminant respectivement par b^2, c^2, a^2, on obtient un déterminant de Vandermonde.

14 $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

Le déterminant s'annule pour $a=0$, d'où le facteur a, etc.; en retranchant la 1re colonne de chacune des autres, on trouve deux fois le facteur $a+b+c$, etc.

15. $$\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix} = 4\sin\frac{1}{2}(x-y)\sin\frac{1}{2}(y-z)\sin\frac{1}{2}(x-z).$$

Le déterminant se ramène à

$$\begin{vmatrix} \cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2} & 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} & \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} \cos^2\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} & \sin^2\frac{x}{2} \end{vmatrix}.$$

En divisant les lignes respectivement par $\cos^2\frac{x}{2}$, $\cos^2\frac{y}{2}$, $\cos^2\frac{z}{2}$, on obtient un déterminant de Vandermonde.

16. $$\begin{vmatrix} \sin^3 a & \sin a & \cos a \\ \sin^3 b & \sin b & \cos b \\ \sin^3 c & \sin c & \cos c \end{vmatrix} = \sin(a+b+c)\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c).$$

Diviser les lignes respectivement par $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ et multiplier ensuite la 3e colonne par $\sin a \sin b \sin c$; cela fait, retrancher la 1re ligne de chacune des suivantes, etc.

17. $$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix} =$$

$$4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}[\sin(a+b)+\sin(b+c)+\sin(c+a)].$$

Ajouter à la 3e colonne les deux 1res multipliées respectivement par

$$\cos(a+b+c)-\Sigma\cos a, \qquad -\sin(a+b+c)-\Sigma\sin a, \text{ etc.}$$

18.
$$\begin{vmatrix} a^3 & (a+x)^3 & (2a+x)^3 \\ b^3 & (b+x)^3 & (2b+x)^3 \\ c^3 & (c+x)^3 & (2c+x)^3 \end{vmatrix} =$$

$$3x^3(a-b)(b-c)(c-a)[(a+b+c)x^2+3(ab+bc+ca)x+6abc].$$

19. Démontrer que le déterminant, d'ordre $n+1$,

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ . & . & . & . & . \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} = (x+na)(x-a)^n.$$

20. Faire le produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ b^3 & 3b^2 & 3b & 1 \\ c^3 & 3c^2 & 3c & 1 \\ d^3 & 3d^2 & 3d & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -a' & a'^2 & -a'^3 \\ 1 & -b' & b'^2 & -b'^3 \\ 1 & -c' & c'^2 & -c'^3 \\ 1 & -d' & d'^2 & -d'^3 \end{vmatrix}.$$

21. Faire le produit des systèmes rectangulaires

$$\begin{matrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ b^3 & 3b^2 & 3b & 1 \\ c^3 & 3c^2 & 3c & 1 \end{matrix} \quad \cdot \quad \begin{matrix} 1 & -a' & a'^2 & -a'^3 \\ 1 & -b' & b'^2 & -b'^3 \\ 1 & -c' & c'^2 & -c'^3 \end{matrix},$$

ou celui des systèmes analogues comprenant plus de 4 lignes.

Quelles relations peut-on conclure des exercices 20 et 21 ?

22. Plus généralement, si

$$F(x,y) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1}y + \dots + A_{n-1}xy^{n-1} + A_ny^n,$$

le déterminant

$$D \equiv \begin{vmatrix} F(x_1,y_1) & F(x_1,y_2) & \dots & F(x_1,y_p) \\ F(x_2,y_1) & F(x_2,y_2) & \dots & F(x_2,y_p) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ F(x_p,y_1) & F(x_p,y_2) & \dots & F(x_p,y_p) \end{vmatrix}$$

est le produit des deux systèmes

$$\left\| \begin{matrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_p^n & x_p^{n-1} & \dots & x_p & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} A_0 & A_1y_1 & A_2y_1^2 & \dots & A_ny_1^n \\ A_0 & A_1y_2 & A_2y_2^2 & \dots & A_ny_2^n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ A_0 & A_1y_p & A_2y_p^2 & \dots & A_ny_p^n \end{matrix} \right\|.$$

En conclure que $D = 0$ si $p > n + 1$, et trouver la valeur de D lorsque $p = n + 1$ ou $< n + 1$.

23. On appelle *circulant* tout déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Démontrer qu'il est égal à un produit de n facteurs de la forme

$$a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 \dots + a_n\omega^{n-1} \qquad (1)$$

où l'on remplace ω successivement par chacune des n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

On ajoute à la première colonne les autres multipliées respectivement par ω, ω^2, ... ω^{n-1}; les éléments de la première colonne seront égaux à la quantité (1), multipliée par 1, ω, ω^2, ... ω^{n-1}, etc.

24. Le produit de deux circulants de même ordre est un circulant.

En particulier,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \Sigma a^3 - 3abc = \Sigma a(\Sigma a^2 - \Sigma ab),$$

$$(\Sigma a^3 - 3abc)(\Sigma a'^3 - 3a'b'c') = \Sigma A^3 - 3ABC,$$

$$(\Sigma a^2 - \Sigma ab)(\Sigma a'^2 - \Sigma a'b') = \Sigma A^2 - \Sigma AB,$$

où

$$A = aa' + bb' + cc', \quad B = ac' + ba' + cb', \quad C = ab' + bc' + ca'.$$

25. Le circulant dont la première ligne est

$$a, \quad a + r, \quad a + 2r, \quad \dots \quad a + \overline{n-1}r$$

a pour expression

$$(-1)^{(n-1)} n^{n-2} r^{n-1} S,$$

S étant la somme des termes d'une ligne du déterminant.

26. Considérons un déterminant quelconque D, d'ordre n.

Formons les combinaisons *ordonnées* des nombres 1, 2, ... n pris i à i, et désignons-les par

$$\gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3, \ \dots \ \gamma_m,$$

où $m = C_n^i$. Soit δ_{rs} le déterminant partiel de D formé avec les éléments communs aux lignes et aux colonnes dont les rangs sont, respectivement,

les éléments des combinaisons γ_r et γ_s; soit aussi δ'_{rs} le cofacteur de δ_{rs}. Si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2m} \\ . & . & . & . \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mm} \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \dots & \delta'_{1m} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \dots & \delta'_{2m} \\ . & . & . & . \\ \delta'_{m1} & \delta'_{m2} & \dots & \delta'_{mm} \end{vmatrix},$$

on a

$$\Delta\Delta' = D^m, \quad \Delta = D^\mu, \quad \Delta' = D^{m-\mu},$$

où $\mu = C_{n-1}^{i-1}$.

27. **Considérons les tableaux rectangulaires**

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n+1} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n+1} \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,\,n-1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,\,n-1} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,\,n-1} \end{matrix}$$

comprenant n lignes et, respectivement, $n+1$ et $n-1$ colonnes.

Appelons A_p le déterminant obtenu en supprimant la p^e colonne du premier tableau, et B_p le déterminant obtenu en écrivant cette p^e colonne à la gauche du second tableau. Cela posé, démontrer la relation

$$A_1B_1 - A_2B_2 + A_3B_3 \dots + (-1)^n A_{n+1}B_{n+1} = 0.$$

En effet, si l'on considère les déterminants

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} \\ d_2 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} \\ d_3 & b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3,n-1} \\ . & . & . & . & . \\ d_n & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

les mineurs du premier relatifs aux éléments $c_1, c_2, c_3, \dots$ sont $A_1, -A_2, A_3, \dots$: appelons $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ les mineurs du second déterminant relatifs aux éléments $d_1, d_2, \dots d_n$. Nous aurons

$$B_p = a_{1p}\delta_1 + a_{2p}\delta_2 + \dots + a_{np}\delta_n \qquad (p = 1, 2, \dots n).$$

Ajoutons les égalités analogues après les avoir multipliées respectivement par $A_1, -A_2, A_3, \dots$: les coefficients de $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ seront nuls.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

—

Équations non homogènes.

72. Système de n équations du premier degré à n inconnues. — Nous considérons un tel système sous la forme

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n - b_r = 0. \qquad (r = 1, 2, \dots n).$$

Soient $X_1, X_2, \dots X_n$ les premiers membres de ces équations :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + \dots + a_{1n}x_n - b_1, \\ X_2 &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + \dots + a_{2n}x_n - b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n &\equiv a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p + \dots + a_{nn}x_n - b_n \end{aligned}\right\} ; \qquad (1)$$

le système proposé sera

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_n = 0. \qquad (2)$$

Nous désignons par D le déterminant des coefficients des inconnues :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D est appelé le *déterminant du système* (2). Nous représenterons ses mineurs par $A_{11}, A_{12}, \dots$.

73. Théorème. — *Un système de* n *équations du premier degré à* n *inconnues dont le déterminant* D *n'est pas nul, admet une solution et n'en admet qu'une seule. Les valeurs des inconnues ont pour dénominateur commun le déterminant* D*; le numérateur de chaque inconnue est le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans* D *les coefficients de cette inconnue par les termes connus correspondants, ceux-ci étant supposés écrits dans les seconds membres des équations.*

Ajoutons membre à membre les identités (1) multipliées respectivement par les mineurs relatifs à une même colonne de D, soit par

$$A_{1p}, \quad A_{2p}, \quad \dots \quad A_{np},$$

quantités qui ne sont pas toutes nulles puisque D ≠ 0. Nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} A_{1p}X_1 + A_{2p}X_2 + \dots + A_{np}X_n \\ \equiv (a_{11}A_{1p} + a_{21}A_{2p} + \dots)x_1 + (a_{12}A_{1p} + a_{22}A_{2p} + \dots)x_2 + \dots \\ + (a_{1p}A_{1p} + a_{2p}A_{2p} + \dots)x_p + \dots - (b_1A_{1p} + b_2A_{2p} + \dots). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Dans cette nouvelle identité, le coefficient de x_p est égal à D (**47**) et ceux des autres inconnues sont nuls; la quantité

$$b_1A_{1p} + b_2A_{2p} + \dots + b_nA_{np}$$

est égale au déterminant D où la p^e colonne est remplacée par $b_1, b_2, \dots b_n$, nous la désignons par D_p. L'égalité (3) se réduit donc à

$$A_{1p}X_1 + A_{2p}X_2 + \dots + A_{np}X_n \equiv Dx_p - D_p. \qquad (3')$$

Remplaçant p par 1, 2, ... n, on voit que les identités (1) entraînent les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}X_1 + A_{21}X_2 + \dots + A_{n1}X_n \equiv Dx_1 - D_1, \\ A_{12}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{n2}X_n \equiv Dx_2 - D_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}X_1 + A_{2n}X_2 + \dots + A_{nn}X_n \equiv Dx_n - D_n. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Par conséquent, s'il existe des valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$ qui vérifient les équations (2), ces valeurs vérifient également les équations

$$Dx_1 - D_1 = 0, \quad Dx_2 - D_2 = 0, \quad \dots \quad Dx_n - D_n = 0. \qquad (5)$$

Comme D ≠ 0, le système (5) admet une solution et une seule :

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}. \qquad (6)$$

Il reste à montrer que ces nombres satisfont au système (2). A cet effet, ajoutons membre à membre les identités (4) multipliées respectivement par les coefficients des inconnues de l'une des équations données, soit par

$$a_{r1}, \quad a_{r2}, \quad \dots \quad a_{rn},$$

quantités qui ne sont pas toutes nulles. Dans l'égalité résultante, le coefficient de X_r est

$$a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \dots + a_{rn}A_{rn} = D,$$

et les coefficients des autres quantités X sont nuls (**47**); on a donc

$$DX_r \equiv a_{r1}(Dx_1 - D_1) + a_{r2}(Dx_2 - D_2) + \dots + a_{rn}(Dx_n - D_n).$$

Cette identité montre que les valeurs (6) vérifient l'équation $X_r = 0$, et comme on peut faire $r = 1, 2, \dots n$, elles satisfont au système proposé (2).

74. Remarques. — I. Supposons

$$D \neq 0, \quad b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0;$$

les équations (5) ont la forme $Dx_r = 0$. Donc un système de n équations linéaires et homogènes à n inconnues dont le déterminant n'est pas nul, admet la seule solution

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_n = 0.$$

II. Supposons $D = 0$, $D_p \neq 0$; le système (2) est impossible. En effet, l'identité (3) se réduit à

$$A_{1p}X_1 + A_{2p}X_2 + \dots + A_{np}X_n \equiv - D_p;$$

on en conclut qu'il ne peut exister de valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$ annulant à la fois $X_1, X_2, \dots X_n$.

75. Théorème. — *Etant donné un système de* n + 1 *équations du premier degré à* n *inconnues, si* n *de ces équations admettent une solution unique* (ont un déterminant différent de zéro), *la condition nécessaire et suffisante pour que cette solution vérifie l'équation restante, est que le déterminant formé avec les coefficients des inconnues et les termes connus des* n + 1 *équations soit nul.*

Soit le système

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots, \quad X_n = 0, \quad X_m = 0, \qquad (m = n + 1)$$

où

$$X_r \equiv a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n - b_r$$

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{vmatrix}.$$

Si l'on multiplie la dernière colonne de Δ par -1 et qu'on y ajoute les autres colonnes multipliées par des nombres quelconques $x_1, x_2, \dots x_n$, on trouve

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & X_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & X_n \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & X_m \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Prenons pour ces nombres $x_1, x_2, \dots x_n$ la solution unique qu'admettent, par hypothèse, les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_n = 0, \qquad (2)$$

et désignons par D le déterminant du système (2); l'égalité (1) devient

$$\Delta = -DX_m.$$

On en conclut que si la solution des équations (2) vérifie également l'équation $X_m = 0$, on a $\Delta = 0$; réciproquement, si $\Delta = 0$, l'équation $X_m = 0$ est compatible avec les équations (2).

Remarque. — En sous-entendant la condition $D \neq 0$, on énonce souvent le théorème précédent sous la forme :

Pour que $n+1$ *équations linéaires à* n *inconnues soient compatibles, il faut et il suffit que le déterminant formé avec les coefficients des inconnues et les termes connus soit nul.*

Équations homogènes.

76. Un système d'équations homogènes en $x_1, x_2, \dots x_n$ admet toujours la solution

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_n = 0,$$

que l'on nomme la *solution zéro*. On fait souvent abstraction de cette solution, et l'on dit même que le système est *impossible* quand il n'a pas d'autre solution.

Si le système homogène admet une solution $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ dont tous les nombres ne sont pas nuls, il est également vérifié par les nombres $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots \lambda\alpha_n)$, quel que soit le facteur λ. Ces solutions sont considérées comme une seule et on les représente par les proportions

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n}{\alpha_n}.$$

Si l'un des conséquents est nul, l'antécédent correspondant est également nul.

Un système non homogène peut être rendu homogène en remplaçant les inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n$ par

$$\frac{x_1}{x_{n+1}}, \quad \frac{x_2}{x_{n+1}}, \quad \ldots \quad \frac{x_n}{x_{n+1}},$$

x_{n+1} étant une inconnue auxiliaire à laquelle on peut donner une valeur quelconque autre que zéro.

Nous allons adapter les théorèmes (**73**) et (**75**) aux équations linéaires homogènes

77. Théorème. — *Etant donné un système de* n *équations linéaires homogènes à* n + 1 *inconnues :*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2m}x_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_{nm}x_m = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

où m *est écrit pour* n + 1, *désignons par* $D_1, D_2, \ldots D_m$ *les déterminants qu'on déduit du tableau des coefficients*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{nm} \end{array} \quad (T)$$

en supprimant la 1re, *la* 2e, ... *la* m^e^ *colonne. Si l'un de ces déterminants est différent de zéro, le système proposé admet une solution unique, représentée par les formules*

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{-D_2} = \frac{x_3}{D_3} = \frac{x_4}{-D_4} \ldots \quad (2)$$

Supposons $D_m \neq 0$, et considérons le système

$$a_{r1}\frac{x_1}{x_m} + a_{r2}\frac{x_2}{x_m} + \ldots + a_{rn}\frac{x_n}{x_m} + a_{rn} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots m)$$

qu'on obtient en divisant les équations (1) par x_m. Les inconnues

$$\frac{x_1}{x_m}, \quad \frac{x_2}{x_m}, \quad \ldots \quad \frac{x_n}{x_m}$$

ont des valeurs déterminées (**73**), dont le dénominateur commun est le déterminant D_m du système et dont les numérateurs se déduisent de D_m en remplaçant la 1re, la 2e, . . la n^e colonne par la suite $-a_{1m}, -a_{2m}, \ldots, -a_{nm}$. Si nous convenons de représenter un déterminant formé avec n colonnes du tableau (T) par les rangs de ces colonnes mis entre deux traits verticaux, la solution prend la forme

$$\frac{x_1}{x_m} = -\frac{|\, m\ 2\ 3 \ldots n\, |}{D_m},$$

$$\frac{x_2}{x_m} = -\frac{|\, 1\ m\ 3 \ldots n\, |}{D_m}, \text{ etc.}$$

En échangeant la colonne représentée par m successivement avec chacune des suivantes, on trouve

$$|\, m\ 2\ 3\ 4 \ldots n\, | = (-1)^{n-1}\, |\, 2\ 3\ 4 \ldots n\ m\, | = (-1)^{n-1} D_1,$$

$$|\, 1\ m\ 3\ 4 \ldots n\, | = (-1)^{n-2}\, |\, 1\ 3\ 4 \ldots n\ m\, | = (-1)^{n-2} D_2, \text{ etc}$$

Donc

$$\frac{x_1}{x_m} = (-1)^n \frac{D_1}{D_m}, \quad \frac{x_2}{x_m} = (-1)^{n-1}\frac{D_2}{D_m}, \ldots \frac{x_n}{x_m} = -\frac{D_n}{D_m}.$$

Ces égalités conduisent aux proportions (2).

Exemples. — I.

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Ce système admet la solution

$$\frac{x}{|\, b_1\ c_1\, |} = -\frac{y}{|\, a_1\ c_1\, |} = \frac{z}{|\, a_1\ b_1\, |},$$

ou

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - c_2b_2},$$

pourvu que l'un des dénominateurs soit différent de zéro.

II.
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0.$$

La solution de ce système est

$$\frac{x}{|b_1\ c_1\ d_1|} = \frac{-y}{|a_1\ c_1\ d_1|} = \frac{z}{|a_1\ b_1\ d_1|} = \frac{-u}{|a_1\ b_1\ c_1|},$$

pourvu que l'un des déterminants soit différent de zéro.

78. Théorème. – *Etant donné un système linéaire homogène de* n + 1 *équations à* n + 1 *inconnues, si* n *de ces équations admettent une solution unique autre que la solution zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que cette solution vérifie l'équation restante, est que le déterminant du système proposé soit nul*

Soit le système

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2m}x_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{nm}x_m = 0, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + a_{mm}x_m = 0, \end{array}$$

où m est écrit pour $n + 1$.

Si l'on suppose le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

différent de zéro, les n premières équations du système admettent une solution unique autre que $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Pour que cette solution vérifie la $(n+1)^e$ équation, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nm} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{mm} \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

En effet, désignons par $X_1, X_2, \dots X_n$ les premiers membres des équations proposées, et appelons Δ le déterminant (1). Si à la dernière colonne de Δ multipliée par x_m, on ajoute les autres multipliées respectivement par $x_1, x_2, \dots x_n$ (ces nombres x sont quelconques), on trouve

$$x_m \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & X_n \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & X_m \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \lambda_m$ les mineurs de Δ relatifs à la dernière colonne ; l'égalité (2) donne

$$x_m \Delta = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n + \lambda_m X_m. \qquad (3)$$

On en conclut que la solution qui vérifie les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \dots X_n = 0$, satisfait également à l'équation $X_m = 0$ pourvu que l'on ait $\Delta = 0$; et réciproquement.

Remarques. — I. Dans le cas considéré, il existe entre les fonctions X une relation linéaire

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m = 0,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs des variables $x_1, x_2, \dots x_m$; autrement dit, *ces fonctions ne sont pas indépendantes.*

II. Si $\Delta \neq 0$, la seule solution du système proposé est la solution zéro (**74**, I).

79. Sur les systèmes rectangulaires nuls. — Pour fixer les idées, considérons cinq équations à trois inconnues :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \qquad (1)$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \qquad (2)$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0, \qquad (3)$$
$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0, \qquad (4)$$
$$e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 = 0. \qquad (5)$$

Supposons que les deux premières admettent une solution autre que la solution zéro ; ce qui exige que l'un au moins des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

soit différent de zéro. Pour que cette solution vérifie également les équations (3), (4) et (5), on doit avoir (**78**)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Mais alors les systèmes formés par les équations (2), (3) et (4) ou (2), (3) et (5), etc., admettent une solution non nulle ; par suite

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{etc.} \qquad (8)$$

On est convenu d'indiquer toutes les égalités (7) et (8) en écrivant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad (9)$$

cette notation signifie que tous les déterminants formés avec trois colonnes quelconques du tableau rectangulaire sont nuls. Il y a C_5^3 de ces déterminants ; mais l'égalité (9) revient à trois égalités distinctes, pour lesquelles on prend, par exemple, les égalités (7).

Réciproquement, étant donnée l'égalité (9), si les déterminants (6) dérivant de deux colonnes du tableau (9) ne sont pas tous nuls, on peut écrire les égalités (1) à (5) ; autrement dit, il existe une même relation linéaire homogène entre les éléments d'une même colonne.

80. Applications géométriques. — I. Cherchons l'équation de la circonférence passant par trois points donnés A_1, A_2, A_3. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées rectangulaires de ces points et

$$x^2 + y^2 = ax + by + c \qquad (1)$$

l'équation du cercle. On aura les égalités de condition

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= ax_1 + by_1 + c, \\ x_2^2 + y_2^2 &= ax_2 + by_2 + c, \\ x_3^2 + y_3^2 &= ax_3 + by_3 + c, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

qui servent à déterminer les paramètres *a, b, c*. Pour que le système (2) admette une solution, il faut et il suffit que le déterminant $| x_1 \; y_1 \; 1 |$ soit

différent de zéro, ou que les points A_1, A_2, A_3 soient les sommets d'un triangle proprement dit. Si cette condition est vérifiée, on a

$$a = \frac{|x_1^2 + y_1^2 \;\; y_1 \;\; 1|}{|x_1 \;\; y_1 \;\; 1|}, \quad b = \frac{|x_1 \;\; x_1^2 + y_1^2 \;\; 1|}{|x_1 \;\; y_1 \;\; 1|},$$

$$c = \frac{|x_1 \;\; y_1 \;\; x_1^2 + y_1^2|}{|x_1 \;\; y_1 \;\; 1|}.$$

Il reste à porter ces valeurs dans l'équation (1), ce qui revient à exprimer que les équations (1) et (2) sont vérifiées par un même système de valeurs des inconnues a, b, c. L'équation cherchée est donc (**75**)

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

II. Attribuons les coordonnées courantes x, y à un point déterminé A de la circonférence, et développons le déterminant (3) suivant les éléments de la première colonne; si S, S_1, S_2, S_3 désignent les aires des triangles $A_1A_2A_3$, A_2A_3A, A_3AA_1, AA_1A_2 prises avec des signes convenables, il vient

$$\overline{OA}^2 . S - \overline{OA_1}^2 . S_1 + \overline{OA_2}^2 . S_2 - \overline{OA_3}^2 . S_3 = 0. \tag{4}$$

Cette égalité exprime une relation nécessaire entre quatre points d'une circonférence et un cinquième point quelconque O. Remplaçons-y O successivement par quatre points quelconques O, O_1, O_2, O_3 et éliminons S, S_1, S_2, S_3 entre les équations ainsi obtenues: nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} \overline{OA}^2 & \overline{OA_1}^2 & \overline{OA_2}^2 & \overline{OA_3}^2 \\ \overline{O_1A}^2 & \overline{O_1A_1}^2 & \overline{O_1A_2}^2 & \overline{O_1A_3}^2 \\ \overline{O_2A}^2 & \overline{O_2A_1}^2 & \overline{O_2A_2}^2 & \overline{O_2A_3}^2 \\ \overline{O_3A}^2 & \overline{O_3A_1}^2 & \overline{O_3A_2}^2 & \overline{O_3A_3}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

C'est une relation entre les distances de quatre points d'une circonférence à quatre points quelconques de son plan. On peut faire coïncider les points O, O_1, O_2, O_3 respectivement avec A, A_1, A_2, A_3; ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{AA_1}^2 & \overline{AA_2}^2 & \overline{AA_3}^2 \\ \overline{A_1A}^2 & 0 & \overline{A_1A_2}^2 & \overline{A_1A_3}^2 \\ \overline{A_2A}^2 & \overline{A_2A_1}^2 & 0 & \overline{A_2A_3}^2 \\ \overline{A_3A}^2 & \overline{A_3A_1}^2 & \overline{A_3A_2}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

équation d'où l'on peut déduire que le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible convexe est égal à la somme des produits des côtés opposés.

III. Soient A, A_1, A_2, A_3 quatre points quelconques du plan et appelons D la valeur correspondante du déterminant (3); en développant comme ci-dessus nous aurons

$$\frac{1}{2} D = \overline{OA}^2 . S - \overline{OA_1}^2 . S_1 + \overline{OA_2}^2 . S_2 - \overline{OA_3}^2 . S_3. \tag{7}$$

Il est facile de voir que la valeur de D est indépendante de la position de l'origine O; en effet, si l'on transporte les axes au point (α, β), il faut remplacer $x, y, x_1, y_1, \dots$ par $x + \alpha$, $y + \beta$, $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta, \dots$ Le déterminant (3) devient

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 & x + \alpha & y + \beta & 1 \end{vmatrix};$$

on retrouve sa forme primitive en soustrayant de la 2e et de la 3e colonne la 4e multipliée respectivement par α et par β, puis de la 1re les trois autres multipliées respectivement par 2α, 2β, $\alpha^2 + \beta^2$.

Cela posé, nous pouvons éliminer les quantités D, S, S_1, S_2, S_3 entre l'équation (7), les trois analogues qui correspondent à trois autres points O_1, O_2, O_3 et l'équation

$$0 = S - S_1 + S_2 + S_3;$$

nous aurons une relation,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{OA}^2 & \overline{OA_1}^2 & \overline{OA_2}^2 & \overline{OA_3}^2 \\ 1 & \overline{O_1A}^2 & \overline{O_1A_1}^2 & \overline{O_1A_2}^2 & \overline{O_1A_3}^3 \\ 1 & \overline{O_2A}^2 & \overline{O_2A_1}^2 & \overline{O_2A_2}^2 & \overline{O_2A_3}^2 \\ 1 & \overline{O_3A}^2 & \overline{O_3A_1}^2 & \overline{O_3A_2}^2 & \overline{O_3A_3}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

entre les distances de quatre points quelconques A, A_1, A_2, A_3 à quatre autres points quelconques O, O_1, O_2, O_3.

Faisons coïncider les deux quadrilatères $AA_1A_2A_3$, $OO_1O_2O_3$; nous aurons l'égalité suivante entre les côtés et les diagonales d'un quadrilatère:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \overline{AA_1}^2 & \overline{AA_2}^2 & \overline{AA_3}^2 \\ 1 & \overline{A_1A}^2 & 0 & \overline{A_1A_2}^2 & \overline{A_1A_3}^2 \\ 1 & \overline{A_2A}^2 & \overline{A_2A_1}^2 & 0 & \overline{A_2A_3}^2 \\ 1 & \overline{A_3A}^2 & \overline{A_3A_1}^2 & \overline{A_3A_2}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

DISCUSSION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

81. Théorème de M. Rouché. — Soit

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m - b_1 = 0, \\ X_2 \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m - b_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_n \equiv a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m - b_n = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

un système quelconque de n équations linéaires à m inconnues.

Considérant le tableau formé avec les coefficients des inconnues,

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}, \end{array} \quad (T)$$

nous examinerons successivement différents cas.

1° $n = m$ et le déterminant qui correspond au tableau (T) est différent de zéro. Le système (1) admet alors une solution unique (**73**).

2° $n > m$ et un déterminant formé avec m lignes de T est différent de zéro. Soit, pour fixer les idées,

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

ce déterminant; il comprend les m premières lignes de (T).

Les équations correspondantes

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_m = 0 \quad (2)$$

admettent alors une solution unique; pour que le système (2) soit compatible avec l'une des autres équations, par exemple avec l'équation $X_\alpha = 0$, ($\alpha = m + 1, m + 2, \dots n$), il faut et il suffit (**75**) que le déterminant

$$\delta_\alpha = \begin{vmatrix} & & & & b_1 \\ & & \delta & & b_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_m \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha m} & b_\alpha \end{vmatrix}$$

soit nul. Si l'un des déterminants δ_α n'est pas nul, le système (1) est contradictoire.

3° $m > n$ et l'un des déterminants formés avec n colonnes de (T) n'est pas nul. Soit, par exemple,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ce déterminant ; il comprend les n premières colonnes de (T).

Nous pourrons résoudre les équations (1) par rapport aux n inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n$ dont le déterminant des coefficients est différent de zéro (**73**). Les valeurs des autres inconnues restant arbitraires, le système proposé est *indéterminé*.

4° Supposons enfin que tous les déterminants formés avec m lignes de (T) si $m \leqq n$, ou avec n colonnes de (T) si $n < m$ soient nuls. Nous cherchons alors parmi les déterminants formés avec les éléments communs à un certain nombre de lignes et à un nombre égal de colonnes de (T), le déterminant de l'ordre le plus élevé qui n'est pas nul. Soit

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

ce déterminant ; nous le faisons correspondre aux p premières équations et aux p premières inconnues (s'il n'en était pas, on ferait un changement de notations). Le nombre p, d'après nos hypothèses, est inférieur au plus petit des nombres m et n ; de plus, tous les déterminants partiels déduits de (T) et d'un ordre supérieur à p, sont nuls.

Nous nommerons δ le *déterminant principal* (*) du système (1). Si le tableau (T) donne plusieurs déterminants d'ordre p qui sont différents de zéro, l'un quelconque d'entre eux peut être choisi pour déterminant principal.

(*) Cette dénomination s'applique aussi aux déterminants désignés par δ dans les deux cas précédents et au déterminant qui correspond au tableau (T) dans le premier cas.

Le système d'équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_p = 0$$

peut être résolu par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \dots x_p$ dont le déterminant des coefficients est différent de zéro (**73**); les valeurs ainsi obtenues sont des fonctions des autres inconnues $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$. Pour que les valeurs obtenues vérifient l'une des autres équations, par exemple l'équation $X_\alpha = 0$, il faut et il suffit (**75**) que le déterminant

$$\begin{vmatrix} & & & & y_1 \\ & & \delta & & y_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & y_p \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha p} & y_\alpha \end{vmatrix} \qquad (\alpha = p+1, p+2, \dots n) \qquad (3)$$

soit nul, y_r désignant la quantité qui, dans X_r, représente le terme indépendant des inconnues $x_1, x_2, \dots x_p$, c'est-à-dire

$$a_{r,p+1}x_{p+1} + a_{r,p+2}x_{p+2} + \dots + a_{r,n}x_n - b_r.$$

Si l'on remplace les y par leurs valeurs, on peut décomposer le déterminant (3) en plusieurs autres (**49**) en réduisant la dernière colonne successivement à chacune de ses *files;* tous les déterminants ainsi obtenus, à l'exception du dernier

$$\begin{vmatrix} & & & & b_1 \\ & & \delta & & b_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_p \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha p} & b_\alpha \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

sont nuls comme étant égaux aux produits de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$ par un déterminant, d'ordre $p + 1$, déduit du tableau (T). Donc, si l'on désigne par δ_α le déterminant (4), le système proposé sera possible, mais indéterminé (les valeurs de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$ restant arbitraires), pourvu que l'on ait

$$\delta_{p+1} = 0, \quad \delta_{p+2} = 0, \quad \dots \quad \delta_n = 0. \qquad (5)$$

Il sera impossible si l'une des conditions (5) n'est pas remplie.

Les déterminants δ_α ont reçu le nom de *déterminants caractéristiques* du système (1).

En résumé : *Pour que* n *équations à* m *inconnues soient compatibles, il faut et il suffit que les déterminants caractéristiques soient tous nuls. Dans cette hypothèse, le système a une solution unique ou il est indéterminé, suivant que le nombre des inconnues est égal au degré du déterminant principal ou lui est supérieur.*

Cet énoncé s'applique aux quatre cas considérés.

82. Remarque. — Lorsque le système (1) est compatible, et le degré du déterminant principal inférieur à celui des équations, les fonctions $X_1, X_2, \dots X_n$ ne sont pas distinctes.

En effet, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} & & & X_1 \\ & \delta & & X_2 \\ & & & \vdots \\ & & & X_p \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots\ a_{\alpha p} & X_\alpha \end{vmatrix} \qquad (\alpha = p+1, p+2, \dots n) \qquad (6)$$

et supposons qu'on y remplace les X par leurs valeurs explicites.

Si nous le décomposons en $n+1$ déterminants en réduisant la dernière colonne successivement à chacune de ses files, tous les déterminants obtenus sont nuls à l'exception du dernier qui est égal à $-\delta_\alpha$. Comme δ_α est nul, le déterminant (5) l'est également, et en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ les mineurs relatifs aux p premiers éléments de la dernière colonne, on peut écrire

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_p X_p + \delta X_\alpha \equiv 0.$$

83. Equations homogènes. — Lorsque

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0,$$

tous les déterminants caractéristiques s'annulent et le système proposé n'est jamais impossible; en effet, il admet la *solution zéro.*

En faisant abstraction de cette solution et en considérant comme une seule solution toutes celles dans lesquelles les inconnues ont les mêmes valeurs à un même facteur près, on peut énoncer le théorème suivant :

Un système de n *équations linéaires et homogènes à* m *inconnues est déterminé, indéterminé ou impossible, suivant que l'ordre du déterminant principal est égal à* m — 1, *inférieur à* m — 1 *ou égal à* m.

Exercices et notes.

1 Résoudre le système

$$\begin{aligned}
x \quad &+ y \quad + z \quad + u \quad = 1, \\
ax \quad &+ by \quad + cz \quad + du \quad = e, \\
a^2x \quad &+ b^2y \quad + c^2z \quad + d^2u = e^2, \\
a^3x \quad &+ b^3y \quad + c^3z \quad + d^3u = e^3,
\end{aligned}$$

et simplifier les valeurs des inconnues (**43**).

2. Le système

$$\begin{aligned}
x \sin a + y \sin 2a + z \sin 3a &= \sin 4a, \\
x \sin b + y \sin 2b + z \sin 3b &= \sin 4b, \\
x \sin c + y \sin 2c + z \sin 3c &= \sin 4c,
\end{aligned}$$

a pour solution

$$\begin{aligned}
x &= 8 \cos a \cos b \cos c + 2(\cos a + \cos b + \cos c), \\
y &= 4\,(\cos a \cos b + \cos b \cos c + \cos c \cos a) - 2, \\
z &= 2(\cos a + \cos b + \cos c).
\end{aligned}$$

3. Trouver une relation entre les cosinus des angles d'un triangle.

On élimine a, b, c entre les relations $a = b \cos C + c \cos B$, etc.

4. Trouver une relation entre le centre et quatre points d'une conique.

Si le centre est l'origine des coordonnées, la relation cherchée est

$$\begin{vmatrix}
x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & 1 \\
x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & 1 \\
x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & 1 \\
x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Pour l'interpréter géométriquement, on observe que les mineurs relatifs à la 4e colonne sont égaux à $\frac{1}{8}\, OA_2A_3 \,.\, OA_3A_4 \,.\, OA_4A_2$, etc.

5. Relation entre un foyer et quatre points d'une conique.

On trouve $\Sigma \pm FA_1 \,.\, A_2A_3A_4 = 0$.

6. Conditions pour que les normales en trois points $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ d'une parabole ($y^2 = 2px$) passent par un même point.

Cette condition se présente sous la forme $\begin{vmatrix} 1 & y_1 & py_1 + x_1y_1 \end{vmatrix} = 0$; on peut la ramener à $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, ou à $\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$.

Donc, le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$ est sur l'axe de la parabole, et la circonférence circonscrite passe par le sommet de la conique.

7. Condition pour que cinq points soient sur une même hyperbole équilatère.

Réponse : $\begin{vmatrix} x_1^2 - y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

8. Condition pour que six points soient sur une même conique.

Réponse : $$\left| x_1^2 \quad x_1y_1 \quad y_1^2 \quad x_1 \quad y_1 \quad 1 \right| = 0.$$

On obtient une équation plus simple en prenant trois des points pour sommets d'un triangle de référence.

9. Trouver la relation entre les six dièdres d'un tétraèdre.

Si α_1, α_2, α_3, α_4 sont les aires des faces, on élimine α_1, α_2, ... entre les égalités

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cos \alpha_2\alpha_1 + \alpha_3 \cos \alpha_3\alpha_1 + \alpha_4 \cos \alpha_4\alpha_1, \quad \text{etc.}$$

CHAPITRE IV.

PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS. FONCTIONS ENTIÈRES.

Sur les limites.

84. Définitions. — On appelle *limite* d'une quantité variable x une quantité constante a telle, que la différence $a - x$, prise en valeur absolue, finisse par devenir et rester inférieure à une quantité ε donnée à l'avance, si petite qu'elle soit. La variable x dont on cherche la limite, est toujours fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes qui tendent vers des valeurs *inaccessibles;* c'est pourquoi la limite a n'est pas une valeur même de x.

Une variable x est dite avoir une *limite infinie*, lorsque sa valeur absolue peut devenir et rester plus grande que toute quantité donnée, le signe de x étant constant.

Si la variable n'a ni limite finie ni limite infinie, on dit quelquefois qu'elle a une *limite indéterminée.*

Pour généraliser certains théorèmes, on dit que *la limite d'une constante est cette constante même.*

On appelle *infiniment petit* une variable qui a pour limite zéro.

Exemples. — I. Considérons la progression géométrique

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad \ldots.$$

La somme des n premiers termes a pour expression

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Examinons comment varie S lorsque n croît indéfiniment, a étant supposé positif.

Si la raison q est positive et moindre que l'unité, la quantité $\frac{aq^n}{1 - q}$ peut devenir et rester aussi petite qu'on veut. Le terme $\frac{a}{1 - q}$ étant indépendant de n, S *croît* vers une limite égale à $\frac{a}{1 - q}$.

Supposons q compris entre 0 et -1 ; la quantité $\frac{aq^n}{1 - q}$ est positive ou négative suivant que n est pair ou impair, mais sa valeur absolue tend vers zéro. Donc S *oscille* autour d'une limite $\frac{a}{1 - q}$.

Lorsque $q > 1$, S a une *limite infinie*.

Si $q = -1$, on a

$$S = a - a + a - a + \ldots;$$

donc S a la valeur a ou 0 suivant que n est impair ou pair. Par suite, pour n croissant indéfiniment, la limite de S est *indéterminée*.

II. Considérons la fonction

$$y = 2 + \frac{7}{x - 3}.$$

Si x prend les valeurs positives et indéfiniment croissantes, *y décroît* constamment vers la limite 2.

Pour des valeurs négatives de x, de module indéfiniment croissant, *y croît* vers la limite 2.

La valeur $x = 3$ est *inaccessible* parce que le quotient d'un nombre par 0 n'a pas de signification. Mais si l'on fait croître x

de 2 vers 3, y passe par des valeurs négatives, de module indéfiniment croissant, et l'on dit que y a pour limite $-\infty$. Au contraire, si x décroît de 4 vers 3, y prend des valeurs positives, indéfiniment croissantes, et l'on dit que y a pour limite $+\infty$.

85. Nombres incommensurables. — Dans la théorie des nombres incommensurables, la notion de limite se présente sous une forme particulière que nous expliquons d'abord sur deux exemples assez simples.

Soit à mesurer la longueur AB, l'unité étant CD (*fig. 10*).

Fig. 10.

Si AB contient p fois CD, on dit que la mesure est l'entier p.

Si AB contient p fois $\frac{1}{q}$ de CD, la mesure est la fraction $\frac{p}{q}$.

Mais il peut arriver que pour aucune valeur de q, $\frac{1}{q}$ de CD ne soit contenu exactement dans AB. On dit alors que AB est *incommensurable* avec CD, ou que le rapport AB : CD est *irrationnel*, en entendant par là qu'il n'existe pas de nombre entier ou fractionnaire exprimant la mesure de AB au moyen de l'unité CD.

Partageons CD en q parties égales et portons l'une de ces parties autant de fois que possible sur AB. Si p de ces parties donnent la longueur AE $<$ AB et qu'une partie de plus donne AF $>$ AB, *il est naturel de dire* que la mesure de AB est $\frac{p}{q}$ par défaut, $\frac{p+1}{q}$ par excès, à moins de $\frac{1}{q}$.

Prenons maintenant pour q successivement des nombres

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad \ldots$$

croissant indéfiniment d'après une loi quelconque, par exemple $q_1 = 10$, $q_2 = 100$, $q_3 = 1000$, etc. : nous désignons par E_1, F_1, E_2, F_2, E_3, F_3, ... les positions correspondantes des points E, F,

et par $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les valeurs correspondantes de p. Nous avons alors les deux suites de longueurs

$$\left.\begin{matrix} AE_1, & AE_2, & AE_3, & \ldots \\ AF_1, & AF_2, & AF_3, & \ldots \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

ayant respectivement pour mesure

$$\left.\begin{matrix} \frac{p_1}{q_1}, & \frac{p_2}{q_2}, & \frac{p_3}{q_3}, & \ldots \\ \frac{p_1+1}{q_1}, & \frac{p_2+1}{q_2}, & \frac{p_3+1}{q_3}, & \ldots \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Comme les segments E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, ... contiennent toujours le point B et diminuent indéfiniment, les différences $AB - AE_1$, $AB - AE_2$, ... et $AF_1 - AB$, $AF_2 - AB$, ... peuvent devenir et rester aussi petites qu'on veut. On peut donc dire que AB est la limite des longueurs (1) commensurables avec AB.

Les nombres (2) n'ont pour limite aucune fraction $\frac{a}{b}$; autrement, si l'on prenait sur AB la longueur $AG = \frac{a}{b}CD$, les points E_1, F_1, E_2, F_2, ... devraient s'approcher indéfiniment à la fois de deux points distincts B et G.

Cependant, on *convient* de dire que les nombres (2) admettent pour limite un certain nombre *incommensurable*, mesure de la longueur AB.

Remarques. — I. La définition que l'on a donnée ci-dessus de la limite, est applicable aux suites (1), parce que la différence entre AB et un terme de ces suites est assignable *géométriquement*. Mais elle ne s'applique pas aux nombres (2); car la mesure de AB n'est définie que par les suites (2) elles-mêmes, de sorte que la différence entre la limite et la quantité variable n'a pas encore de sens.

II. Si $q_2 = mq_1$ (m entier), le segment E_2F_2 est intérieur au segment E_1F_1. Car si l'on porte sur AX la longueur $\frac{CD}{mq_1}$, un point de division tombe en E_1, un autre en F_1 puisque AE_1, AF_1 contiennent p_1 et $(p_1 + 1)$ fois $\frac{CD}{q_1}$ ou mp_1 et $m(p_1 + 1)$ fois $\frac{CD}{mq_1}$, et il tombera encore au moins un point de division entre E_1 et F_1.

Une suite de nombres est dite *monotone* lorsque ses termes ne sont pas tantôt croissants, tantôt décroissants ; autrement dit, les termes vont constamment en croissant ou constamment en décroissant à moins que deux termes consécutifs ne soient égaux. Par exemple, les valeurs approchées par défaut ou par excès du nombre décimal 0,69034 ... forment les deux suites monotones

$$0{,}6, \quad 0{,}69, \quad 0{,}690, \quad 0{,}6903, \quad 0{,}69034, \quad \ldots$$
$$0{,}7, \quad 0{,}70, \quad 0{,}691, \quad 0{,}6904, \quad 0{,}69035, \quad \ldots$$

Si les nombres q_2, q_3, q_4, ... sont respectivement des multiples des nombres q_1, q_2, q_3, ... chacune des suites (2) est monotone. Il en est ainsi quand on prend $q_1 = 10$, $q_2 = 100$, $q_3 = 1000$, ...

86. Il n'existe pas de nombre entier ou fractionnaire dont le carré égale 7. Mais on peut trouver des fractions dont les carrés diffèrent de 7 aussi peu qu'on veut.

En effet, soit p^2 le plus grand carré entier contenu dans le nombre $7q^2$; nous aurons

$$p^2 < 7q^2 < (p+1)^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{p^2}{q^2} < 7 < \frac{(p+1)^2}{q^2}.$$

D'après cette double inégalité, il est *naturel* de dire que la racine carrée de 7 est $\frac{p}{q}$ par défaut, $\frac{p+1}{q}$ par excès, à moins de $\frac{1}{q}$.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{(p+1)^2}{q^2} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} < \frac{6}{q} + \frac{1}{q^2},$$

car $\frac{p^2}{q^2} < 9$, d'où $\frac{p}{q} < 3$; à plus forte raison

$$7 - \frac{p^2}{q^2} < \frac{6}{q} + \frac{1}{q^2}, \quad \frac{(p+1)^2}{q^2} - 7 < \frac{6}{q} + \frac{1}{q^2}. \tag{3}$$

Cela posé, si nous donnons à q des valeurs

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad \cdots$$

qui croissent indéfiniment d'après une loi quelconque, nous obtenons deux suites infinies de fractions

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{p_1}{q_1}, & \frac{p_2}{q_2}, & \frac{p_3}{q_3}, & \ldots \\ \frac{p_1+1}{q_1}, & \frac{p_2+1}{q_2}, & \frac{p_3+1}{q_3}, & \ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Les carrés de ces fractions ont pour limite le nombre 7, ainsi qu'il résulte des inégalités (3). D'après cela, on *convient* de dire que la racine carrée de 7 est la limite des nombres (4) dont les carrés ont pour limite le nombre 7.

Remarque. — On peut faire ici des remarques analogues à celles du § 85.

87. Pour généraliser, considérons deux suites *infinies*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \qquad (a)$$

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots \qquad (b)$$

jouissant des propriétés suivantes : tout nombre de la suite (a) est moindre qu'un nombre quelconque de la suite (b), et la différence $b_n - a_n$ de deux termes correspondants peut devenir et rester moindre qu'un nombre donné, si petit qu'il soit.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Il existe un nombre λ (entier ou fractionnaire) plus grand que tout nombre de la suite (a) et plus petit que tout nombre de la suite (b). Alors les différences $\lambda - a_n$ et $b_n - \lambda$, moindres que $b_n - a_n$, ont pour limite zéro quand n croît indéfiniment; par conséquent, les suites (a) et (b) admettent une limite commune λ (**84**).

2° S'il n'existe pas un tel nombre, on dit que les suites (a) et (b) définissent un nombre d'une espèce nouvelle ; ce nombre est *irrationnel* ou *incommensurable*. Si on le représente par un symbole quelconque, par exemple par λ, on dit que λ est supérieur à a_n et à tout nombre plus petit que a_n, inférieur à b_n et à tout nombre plus grand que b_n ; que les différences $\lambda - a_n$ et $b_n - \lambda$ sont moindres que $b_n - a_n$; enfin, que λ est la limite des deux suites (a) et (b) ou que ces suites *convergent* vers λ.

La représentation géométrique explique très bien ce langage. En effet, portons sur un axe ox (*fig.* II) les abscisses

$$OA_1 = a_1, \quad OA_2 = a_2, \quad \ldots, \quad OB_1 = b_1, \quad OB_2 = b_2, \quad \ldots.$$

Les points A_1, A_2, A_3, ... couvriront une région de Ox sur laquelle ne pénètre aucun des points B_1, B_2, ...; de même,

Fig. 11.

ceux-ci couvriront une région ne renfermant aucun des points A_1, A_2, ... Entre ces deux régions, il n'existera aucun intervalle fini, car la distance A_nB_n doit pouvoir devenir moindre que cet intervalle; il en résulte que les deux régions sont séparées par un simple point de démarcation L, et que les longueurs OA_1, OA_2, ... et OB_1, OB_2, ... ont une limite commune OL. Le nombre, commensurable ou incommensurable, qui mesure OL, est la limite commune des nombres des deux suites (a) et (b).

88. Opérations sur les nombres incommensurables.

Soient λ, λ' deux nombres incommensurables définis respectivement par les suites

$$\begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1, & c_2, & c_3, & \ldots \\ d_1, & d_2, & d_3, & \ldots \end{cases}$$

On suppose, comme ci-dessus, que $a_n < b_p$, $c_n < d_p$ pour toutes les valeurs de n et de p, et que les différences $b_n - a_n$, $d_n - c_n$ tendent vers zéro à mesure que n croît.

Les deux suites

$$\begin{cases} a_1 + c_1, & a_2 + c_2, & a_3 + c_3, & \ldots \\ b_1 + d_1, & b_2 + d_2, & b_3 + d_3, & \ldots \end{cases}$$

définissent également un nombre; car tout nombre de la première est moindre que tout nombre de la seconde, et la différence $(b_n + d_n) - (a_n + c_n)$ peut devenir et rester aussi petite qu'on veut. Le nombre, commensurable ou incommensurable, qui est défini par ces suites, est appelé la *somme* $\lambda + \lambda'$.

La différence $\lambda - \lambda'$, le produit $\lambda\lambda'$, le quotient $\frac{\lambda}{\lambda'}$, sont définies respectivement au moyen des doubles suites :

$$\begin{cases} a_1 - d_1, & a_2 - d_2, & a_3 - d_3, & \ldots \\ b_1 - c_1, & b_2 - c_2, & b_3 - c_3, & \ldots \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_1c_1, & a_2c_2, & a_3c_3, & \dots \\ b_1d_1, & b_2d_2, & b_3d_3, & \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{a_1}{d_1}, & \dfrac{a_2}{d_2}, & \dfrac{a_3}{d_3}, & \dots \\ \dfrac{b_1}{c_1}, & \dfrac{b_2}{c_2}, & \dfrac{b_3}{c_3}, & \dots \end{array} \right.$$

Les autres opérations peuvent être définies d'une manière analogue.

89. Théorème. — *Lorsqu'une variable* x *croît sans cesse, sans pouvoir dépasser un nombre donné* α, *elle a une limite égale ou inférieure à* α.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

les valeurs successives de x. Prenons sur un axe Ox les abscisses

$$OA = \alpha, \quad OA_1 = a_1, \quad OA_2 = a_2, \quad OA_3 = a_3, \quad \dots$$

Par hypothèse, les points A_1, A_2, A_3, .. avancent constamment dans le sens OA. Si la distance A_nA peut devenir et rester aussi petite qu'on veut, x a pour limite α. S'il n'en est pas ainsi, divisons OA en p parties égales ; nous pourrons distinguer une dernière BC de ces parties sur laquelle passe l'extrémité de l'abcisse x ; autrement dit, il existe une valeur de n telle que les points A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, ... sont tous situés sur le segment BC. Divisons ensuite BC en p parties égales ; nous distinguerons encore une dernière B_1C_1 de ces parties sur laquelle passe l'extrémité de l'abcisse x. En continuant ainsi, nous obtenons des segments BC, B_1C_1, B_2C_2, ... dont chacun comprend le suivant et qui décroissent indéfiniment. Comme il ne peut exister qu'un point de démarcation L entre la région des points B, B_1, B_2, ... et celle des points C_1, C_2, C_3. ..., la variable x a une limite représentée par OL.

90. Théorème. — *Lorsqu'une variable* x *décroît sans cesse, sans devenir plus petite qu'un nombre donné* α, *elle a une limite égale ou supérieure à* α.

Cette proposition se démontre comme la précédente.

Remarque. — Nous ne faisons qu'énoncer ici un caractère plus général de convergence des suites infinies de nombres, caractère qui renferme les deux précédents (**89, 90**) comme cas particuliers.

Pour qu'une suite indéfinie de nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

soit convergente ou ait une limite déterminée, il faut et il suffit que pour chaque valeur de ε, *quelque petite qu'elle soit, il existe une valeur de* n *telle que l'on ait*

$$|a_p - a_q| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de p *et de* q *supérieures à* n.

Théorèmes sur les limites.

91. Théorème. — *La limite de la somme algébrique d'un nombre déterminé de variables est égale à la somme algébrique des limites de ces variables.*

Soient x, y, z les valeurs *simultanées* de trois variables (*), et a, b, c leurs limites. On peut poser

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma,$$

α, β, γ étant des nombres dont les valeurs absolues deviennent et restent aussi petites qu'on veut. On en déduit, par exemple,

$$x + y - z = (a + b - c) + (\alpha + \beta - \gamma).$$

Comme chacun des nombres α, β, γ peut devenir et rester moindre, en valeur absolue, que $\frac{1}{3}\varepsilon$ quelque petit que soit ε, $\alpha + \beta - \gamma$ peut rester moindre que ε; donc $x + y - z$ tend vers une limite égale à $a + b - c$, et l'on peut écrire

$$\lim (x + y - z) = a + b - c = \lim x + \lim y - \lim z.$$

Remarques. — I. Le théorème précédent n'a pas de sens lorsque la somme algébrique des limites se présente sous la forme $\infty - \infty$.

(*) Elles sont supposées dépendre d'une ou de plusieurs variables indépendantes qui, elles-mêmes, tendent vers des valeurs *inaccessibles*.

II. Il peut être en défaut lorsque le nombre des variables croît indéfiniment à mesure que chacune d'elles tend vers sa limite. Par exemple, il n'est pas applicable à la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$$

pour $n=\infty$. Car cette somme composée de n nombres supérieurs à $\frac{1}{2n}$, est plus grande que $\frac{n}{2n}$ ou $\frac{1}{2}$; cependant chaque terme a pour limite 0.

92. Théorème. — *La limite du produit d'un nombre déterminé de variables est égale au produit de leurs limites.*

En effet, on a, avec les notations précédentes,

$$xyz = abc + ab\gamma + \ldots + a\beta\gamma + \ldots + \alpha\beta\gamma.$$

Les termes qui suivent *abc*, sont en nombre déterminé et tendent vers zéro (*); donc leur somme tend vers zéro (**91**), et l'on a

$$\lim (xyz) = abc = \lim x \times \lim y \times \lim z.$$

Remarques. — I. Le théorème n'a plus de sens lorsque le produit des limites se présente sous la forme $0.\infty$ ou $\infty.0$.

II. Il peut être en défaut lorsque le nombre des facteurs augmente à mesure que les facteurs tendent vers leurs limites.

Considérons, par exemple, le produit

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n},$$

qui a la valeur constante $\frac{1}{2}$. Quand n croît indéfiniment, le nombre des facteurs augmente et chacun d'eux tend vers l'unité; mais le produit n'a pas pour limite l'unité.

93. Théorème. — *Le quotient de deux variables* x, y *qui tendent vers des limites* a, b, *a pour limite* $\frac{a}{b}$.

(*) Si u est une variable qui tend vers zéro, le produit mu tend également vers zéro. Car $|u|$ devient et reste moindre que tout nombre donné ε; par conséquent $|mu|$ reste moindre que $m\varepsilon$, et l'on peut avoir $m\varepsilon < \varepsilon'$, quelque petit que soit ε'; il suffit de supposer $\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{m}$.

On démontre encore facilement que si u a pour limite a, mu a pour limite ma.

Posons $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$; nous aurons

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - a\beta}{b(b + \beta)}. \qquad (1)$$

A partir de certaines valeurs de x et y, la valeur absolue de $\alpha b - a\beta$ reste inférieure à un nombre donné ε, et la quantité $b(b + \beta)$ reste supérieure à b', b' désignant un nombre fixe quelconque plus petit que b^2; la fraction $\frac{\alpha b - a\beta}{b(b + \beta)}$ restant inférieure, en valeur absolue, à $\frac{\varepsilon}{b'}$, on a

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Remarque. — Le théorème précédent n'a pas de sens lorsque le quotient se présente, à la limite, sous l'une des formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

94. Théorème. — *Si la variable* x *tend vers une limite* a, x^m *a pour limite* a^m.

1° Si m est entier et positif, x^m est le produit de m facteurs égaux à x; donc (**92**) $\lim x^m = a . a \dots a = a^m$.

2° Si $m = -p$, p étant entier et positif, on a (**93**)

$$\lim x^{-p} = \lim \frac{1}{x^p} = \frac{1}{a^p} = a^m.$$

3° Soit $m = \frac{1}{p}$, p étant entier et positif. On a

$$x - a = \left(\sqrt[p]{x}\right)^p - \left(\sqrt[p]{a}\right)^p$$

$$= \left(\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}\right)\left(\sqrt[p]{x^{p-1}} + \sqrt[p]{x^{p-2}a} + \dots + \sqrt[p]{a^{p-1}}\right);$$

d'où

$$\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a} = \frac{x - a}{\sqrt[p]{x^{p-1}} + \sqrt[p]{x^{p-2}a} + \dots + \sqrt[p]{a^{p-1}}}.$$

Soit b un nombre fixe quelconque inférieur à a; à partir d'une certaine valeur, x qui a pour limite a finit par rester plus grand que b et $|x - a|$ par rester inférieur à un nombre donné ε, quelque petit qu'il soit.

Donc, à partir de cette valeur on a

$$\left| \sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a} \right| < \frac{\varepsilon}{p\sqrt[p]{b^{p-1}}};$$

on en conclut que $\lim \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{a}$.

4° Soit $m = \frac{q}{p}$, p et q étant entiers; nous aurons

$$\lim x^m = \lim \left(\sqrt[p]{x}\right)^q = \left(\lim \sqrt[p]{x}\right)^q = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q = a^m.$$

Remarques. — I. On peut encore démontrer que

$$\lim c^x = c^{\lim x}, \quad \lim (\log x) = \log (\lim x), \quad \lim x^y = (\lim x)^{\lim y}.$$

La dernière égalité est illusoire si le second membre se présente sous l'une des formes 0^0, ∞^0, 1^∞.

II. Si les variables x, y, ... tendent vers les limites a, b, ..., la fonction $f(x, y, ...)$ a généralement pour limite $f(a, b, ...)$.

Propriétés des fonctions entières. — Continuité.

95. Théorème. — *Pour toutes les valeurs positives ou négatives de la variable, de module suffisamment grand, une fonction entière réelle a le signe du terme de degré le plus élevé.*

Soit la fonction à coefficients réels

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

On a

$$\frac{F(x)}{A_0 x^m} = 1 + \frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \frac{A_2}{A_0}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{A_m}{A_0}\frac{1}{x^m}. \qquad (1)$$

Considérons d'abord les valeurs positives de x. Si tous les termes du second membre de (1) sont positifs, $F(x)$ a *constamment* le signe de $A_0 x^m$. S'il n'en est pas ainsi, désignons par

$$-\frac{B_1}{x^r}, \quad -\frac{B_2}{x^s}, \ldots \quad -\frac{B_n}{x^t}$$

les termes négatifs. La somme de leurs valeurs absolues sera moindre que le premier terme 1 si x satisfait aux inégalités

$$\frac{B_1}{x^r} < \frac{1}{n}, \quad \frac{B_2}{x^s} < \frac{1}{n}, \quad \ldots \quad \frac{B_n}{x^t} < \frac{1}{n}$$

ou si

$$x > \sqrt[r]{nB_1}, \quad x > \sqrt[s]{nB_2}, \ldots \ x > \sqrt[t]{nB_n}.$$

Soit α la plus grande des quantités $\sqrt[r]{nB_1}$, $\sqrt[s]{nB_2}$, ... On voit que $F(x)$ a le signe de A_0 pour $x \geqq \alpha$.

Le cas des valeurs négatives de x se ramène au précédent en attribuant des valeurs positives à x dans la fonction $F(-x)$.

96. Théorème. — *Pour toutes les valeurs positives ou négatives de la variable, de module suffisamment petit, une fonction réelle a le signe du terme de degré le moins élevé.*

Soit la fonction

$$F(x) = A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_m x^m.$$

où $A_p \neq 0$, p étant positif ou nul. On a

$$\frac{F(x)}{A_p x^p} = 1 + \frac{A_{p+1}}{A_p} x + \ldots + \frac{A_m}{A_p} x^{m-p}. \qquad (1)$$

Considérons d'abord les valeurs positives de x. Si tous les termes du second membre de (1) sont positifs, $F(x)$ a *constamment* le signe de $A_p x^p$. S'il n'en est pas ainsi, désignons par

$$-B_1 x^r, \quad -B_2 x^s, \quad \ldots \quad -B_n x^t$$

les termes négatifs. La somme de leurs valeurs absolues sera moindre que le premier terme 1, si

$$B_1 x^r < \frac{1}{n}, \quad B_2 x^s < \frac{1}{n}, \quad \ldots \quad B_n x^t < \frac{1}{n}$$

ou si

$$x < \frac{1}{\sqrt[r]{nB_1}}, \quad x < \frac{1}{\sqrt[s]{nB_2}}, \quad \ldots \quad x < \frac{1}{\sqrt[t]{nB_n}}.$$

Donc si α désigne la plus grande des quantités $\sqrt[r]{nB_1}$, $\sqrt[s]{nB_2}$, ..., $F(x)$ a le signe de $A_0 x^m$ pour $x < \frac{1}{\alpha}$.

Le cas des valeurs négatives se ramène au précédent en considérant la fonction $F(-x)$.

97. Continuité des fonctions réelles. — Si l'on considère successivement deux valeurs d'une variable indépendante ou

dépendante, la différence entre la seconde valeur et la première est appelée *accroissement* de cette variable ; elle peut être positive ou négative. Par exemple, si x_0 et $x_0 + h$ sont deux valeurs successives de x, l'accroissement de x est h, et celui d'une fonction $F(x)$ est $F(x_0 + h) - F(x_0)$.

Soit $F(x)$ une fonction ayant pour toute valeur de x comprise entre deux nombres déterminés a et b une valeur finie et déterminée, et soit x_0 un nombre appartenant à l'intervalle (a, b). On dit que *la fonction* $f(x)$ *est continue pour la valeur* $x = x_0$ *si l'accroissement* $F(x_0 + h) - F(x_0)$ *a pour limite zéro quand* h *tend vers zéro d'après une loi quelconque.* Autrement dit, à tout nombre positif ε, quelque petit qu'il soit, doit correspondre un nombre η tel, que l'on ait

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de h comprises $-\eta$ et $+\eta$.

La fonction $F(x)$ *est dite continue dans l'intervalle* (a, b), *lorsqu'elle est continue pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* a *et* b, *qu'elle est finie et déterminée pour* $x = a$ *et* $x = b$, *et que* $F(a + h)$, $F(b - h)$ *ont pour limites* $F(a)$, $F(b)$, h *désignant un nombre positif qui tend vers zéro.*

Dans l'étude d'une fonction $F(x)$, la variable indépendante x est supposée croître d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, à la manière de l'abscisse d'un point qui parcourt d'une manière continue tout l'axe des x dans le sens des abscisses positives.

98. Discontinuités. — Une fonction réelle peut être *discontinue* de trois manières : en devenant imaginaire, infinie, ou en sautant brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie.

Exemples. — I. La fonction

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

d'après nos définitions, est continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, où elle est réelle. On dit qu'elle est discontinue pour $x = +1$, parce qu'elle est imaginaire pour $x = 1 + h$; de même elle est discontinue pour $x = -1$ comme étant imaginaire pour $x = -1 - h$.

II. La fonction

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

est dite discontinue pour la valeur $x = 1$ qui la rend infinie. Elle est continue dans tout intervalle ne comprenant pas l'unité.

III. La fonction

$$y = \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x-1}}}$$

où nous supposons $a > 1$, est *discontinue par saut brusque* pour $x = 1$. En effet, soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut. Pour $x = 1 + \varepsilon$ on trouve

$$y = \frac{1}{1 + a^{\infty}} = 0;$$

pour $x = 1 - \varepsilon$,

$$y = \frac{1}{1 + a^{-\infty}} = 1.$$

Donc, lorsque x passe par la valeur 1, y passe brusquement de 1 à 0.

99. Théorème. — *La somme, ou le produit, de plusieurs fonctions continues, est aussi une fonction continue.*

Cette propriété résulte de la définition des fonctions continues et des propositions sur la limite des sommes ou des produits de quantités variables en nombre fini.

Remarque. — Le quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ de deux fonctions continues varie d'une manière continue tant que le dénominateur ne passe pas par zéro.

Une puissance entière d'une fonction continue est elle-même continue. Si m est pair, la racine m^e d'une fonction continue est continue pourvu que l'on considère la racine m^e arithmétique dans un intervalle où la fonction reste positive; si m est impair, cette fonction peut avoir des valeurs positives ou négatives.

100. Théorème. — *Toute fonction entière, à coefficients réels, est continue.*

Soit la fonction à coefficients réels,

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

D'abord, à toute valeur réelle et finie de x correspond une valeur de $F(x)$, réelle, finie et déterminée. Ensuite, chacun des

termes de $F(x)$ étant une fonction continue de x, la somme algébrique de ces termes est également (**99**) une fonction continue.

Les théorèmes suivants se rapportent aux fonctions entières à coefficients réels ou complexes, la variable x recevant des valeurs réelles ou imaginaires.

101. Théorème. — *Si une fonction entière* $F(x)$ *s'annule avec* x, *on peut assigner une quantité positive* r, *telle que pour toutes les valeurs de* x *dont le module est inférieur à* r, *le module de* $F(x)$ *soit inférieur à une quantité donnée* R.

Soit la fonction entière

$$F(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$

dont les coefficients sont réels ou imaginaires ; la variable x reçoit des valeurs réelles ou imaginaires. Désignons par ρ le module de x et par a le plus grand des modules des coefficients $A_1, A_2, \ldots A_m$. Le module d'une somme étant au plus égal à la somme des modules des parties (**13**), on a

$$|F(x)| < a(\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m) \text{ ou } < a\frac{\rho - \rho^{m+1}}{1-\rho};$$

d'où, en supposant $\rho < 1$,

$$|F(x)| < \frac{a\rho}{1-\rho}.$$

On a donc $|F(x)| < R$ pour toutes les valeurs de ρ vérifiant l'inégalité

$$\frac{a\rho}{1-\rho} < R, \quad \text{ou} \quad \rho < \frac{R}{a+R}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$r = \frac{R}{a+R},$$

on a $|F(x)| < R$ pour toutes les valeurs de x telles qu'on ait $|x| < r$.

102. Corollaires. — I. Soit la fonction à coefficients réels

$$F(x) = A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_m x^m;$$

on a

$$\frac{F(x)}{A_p x^p} = 1 + \frac{A_{p+1}}{A_p} x + \frac{A_{p+2}}{A_p} x^2 + \ldots + \frac{A_m}{A_p} x^{m-p}. \quad (1)$$

D'après le théorème précédent, le polynome

$$\frac{A_{p+1}}{A_p} x + \frac{A_{p+2}}{A_p} x^2 + \ldots + \frac{A_m}{A_p} x^{m-p} \quad (2)$$

a un module plus petit que l'unité pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à la quantité

$$r = \frac{1}{1 + a},$$

a désignant la plus grande valeur absolue des fractions $\frac{A_{p+1}}{A_p}, \frac{A_{p+2}}{A_p}, \ldots$

Si l'on ne considère que les valeurs réelles de x comprises entre $-r$ et r, on peut dire que le polynome (2) a une valeur comprise entre -1 et 1 : par suite, le quotient $\frac{F(x)}{A_p x^p}$ a une valeur positive.

Donc, *pour toutes les valeurs de* x *de l'intervalle* ($-$ r, r), F(x) *a le signe de son premier terme* (96).

II. Soit la fonction à coefficients réels

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

On a

$$\frac{F(x)}{A_0 x^m} = 1 + \frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \frac{A_2}{A_0}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{A_m}{A_0}\frac{1}{x^m}$$

$$= 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_m z^m,$$

z désignant $\frac{1}{x}$, et B_i la fraction $\frac{A_i}{A_0}$. Le polynome

$$B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_m z^m$$

a un module plus petit que l'unité pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à la quantité

$$r = \frac{1}{1 + b},$$

b désignant la plus grande des valeurs absolues de $B_1, B_2, \ldots$

En particulier, pour les valeurs réelles de z comprises entre $-r$ et $+r$, le polynôme $B_1 z + \ldots$ a une valeur comprise entre -1 et $+1$, et par suite le quotient $\frac{F(x)}{A_0 x^m}$ est positif. Il résulte de là que *si la valeur absolue de* x *est supérieure à* 1 + b, F(x) *a le signe de son premier terme* (95).

103. Théorème. — *Etant donnée une fonction entière* F(x), *on peut assigner une quantité positive* r, *telle que pour toutes les valeurs de* x *dont le module est supérieur à* r, *le module de* F(x) *soit supérieur à une quantité donnée* R.

Soit la fonction entière à coefficients quelconques

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Désignons par ρ le module de la variable x, et par $a_0, a_1, \ldots a_m$ ceux des coefficients $A_0, A_1, \ldots A_m$. Si l'on considère $F(x)$ comme la somme de $A_0 x^m$

et de $A_1x^{m-1} + \dots + A_m$, on voit que son module est supérieur ou égal à la différence des modules de ces parties ; donc

$$|F(x)| \geq a_0\rho^m - |A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m|. \qquad (1)$$

D'autre part (**12**),

$$|A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_n| \leq a_1\rho^{m-1} + a_2\rho^{m-2} + \dots + a_m. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on conclut

$$|F(x)| \geq a_0\rho^m - a_1\rho^{m-1} - a_2\rho^{m-2} \dots - a^m.$$

On a donc $|F(x)| > R$ pour toutes les valeurs de x dont le module vérifie l'inégalité

$$a_0\rho^m - a_1\rho^{m-1} - a_2\rho^{m-2} \dots - a_{n-1}\rho - (a_m + R) > 0. \qquad (3)$$

Soit a le plus grand des nombres $a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_m + R$; on satisfait à l'inégalité (3) si

$$a_0\rho^m - a(\rho^{m-1} + \rho^{m-2} + \dots + \rho + 1) > 0,$$

ce qui revient à

$$a_0\rho^m - a\frac{\rho^m - 1}{\rho - 1} > 0.$$

Cette inégalité peut prendre la forme

$$\rho^m\left(a_0 - \frac{a}{\rho - 1}\right) + \frac{a}{\rho - 1} > 0;$$

elle a lieu si, ρ étant plus grand que l'unité, on a

$$a_0 - \frac{a}{\rho - 1} > 0 \quad \text{ou} \quad \rho > 1 + \frac{a}{a_0}.$$

Par conséquent, si l'on fait

$$1 + \frac{a}{a_0} = r,$$

le module de $F(x)$ sera plus grand que R pour toutes les valeurs de x dont le module est égal ou supérieur à r.

104. Variables complexes. — Si deux variables complexes

$$z = x + yi, \quad Z = X + Yi$$

sont liées l'une à l'autre de manière qu'à toute valeur de la variable indépendante z corresponde une valeur déterminée de Z, on dit que Z est une fonction de z.

Si l'on a recours à la représentation géométrique (**9**), toute position de z (*) dans le plan xy détermine une position correspondante de Z.

(*) Nous disons ici « le point z » au lieu de « le point qui a pour coordonnées x, y ».

Considérons en particulier une fonction entière

$$F(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_m;$$

les coefficients A_0, A_1, ... sont réels ou imaginaires, et la variable z reçoit des valeurs de la forme $x + yi$. Lorsqu'on donne à z l'accroissement h, la fonction reçoit l'accroissement

$$F(z+h) - F(z) = A_0(z+h)^m + A_1(z+h)^{m-1} + \dots + A_m - F(z).$$

En développant les puissances de $z+h$ par le binome de Newton, on trouve une expression de la forme :

$$F(z+h) - F(z) = B_1 h + B_2 h^2 + \dots + B_m h^m,$$

où B_1, B_2, ... sont des fonctions de z. Or (101), pour toutes les valeurs de h dont le module est moindre qu'une certaine quantité r, le module du polynôme $B_1 h + B_2 h^2 + \dots$ reste inférieur à un nombre donné R quelque petit qu'il soit. Autrement dit, le module de $F(z+h) - F(z)$ tend vers zéro en même temps que celui de h. On en conclut, en généralisant la définition de la continuité, que *la fonction* F(Z) *est continue avec* Z.

Géométriquement, si le point z éprouve un déplacement infiniment petit, il en est de même du point Z. Si le premier décrit une courbe d'un mouvement continu, le point Z décrit une seconde courbe d'un mouvement continu.

Dérivée d'une fonction entière.

105. Définitions. — On appelle *dérivée* d'une fonction entière

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$$

le polynome

$$m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \dots + A_{m-1}$$

qu'on obtient en multipliant chaque terme de $F(x)$ par l'exposant de x, et en diminuant de 1 l'exposant de x. On indique une dérivée en ajoutant un accent à la lettre qui désigne la fonction : la dérivée de $F(x)$, de $f(x)$, de y, ... est désignée par $F'(x)$, $f'(x)$, y', ...

La dérivée de $F(x)$ admet à son tour une dérivée; c'est la *dérivée seconde*, désignée par $F''(x)$. La dérivée de celle-ci est la dérivée troisième $F'''(x)$, et ainsi de suite.

La dérivée p^e d'une fonction de degré m est de degré $m-p$; la dérivée m^e se réduit à une constante, et celles d'ordre plus élevé sont nulles.

Exemple. — $F(x) = 7x^3 - 5x^2 - 12x + 8,$

$F'(x) = 21x^2 - 10x - 12,$

$F''(x) = 42x - 10,$

$F'''(x) = 42, \quad F^{IV}(x) = 0, \quad F^{V}(x) = 0, \ \ldots$

106. Remarques. — I. Si on multiplie une fonction entière par une constante, la dérivée est multipliée par cette constante, de manière que la dérivée de $aF(x)$ est $aF'(x)$.

II. La dérivée d'une somme de plusieurs fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions. La dérivée de $F(x) + f(x) - \varphi(x)$, par exemple, est $F'(x) + f'(x) - \varphi'(x)$.

Ces propositions se démontrent très facilement.

107. Formule de Taylor. — *Soit une fonction entière*

$$F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m; \qquad (1)$$

on a

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!}F^{(m)}(x). \qquad (2)$$

Cette égalité se vérifie immédiatement pour $F(x) = x^m$: car la formule du binome donne

$$(x+h)^m = x^m + \frac{h}{1}mx^{m-1} + \frac{h^2}{1.2}m(m-1)x^{m-2} + \ldots + \frac{h^m}{m!}m(m-1)\ldots 3.2.1.$$

En multipliant tous les termes de cette identité par une constante a on voit que la formule (2) a lieu pour ax^m.

Cela posé, si l'on désigne par u_m, u_{m-1}, ... les différents termes de la fonction (1), on a

$$A_0(x+h)^m = u_m + \frac{h}{1}u'_m + \frac{h^2}{1.2}u''_m + \ldots,$$

$$A_1(x+h)^{m-1} = u_{m-1} + \frac{h}{1}u'_{m-1} + \frac{h^2}{1.2}u''_{m-1} + \ldots,$$

$$A_2(x+h)^{m-2} = u_{m-2} + \frac{h}{1}u'_{m-2} + \frac{h^2}{1.2}u''_{m-2} + \ldots,$$

. . . .

$$A_{m-1}(x+h) = u_1 + \frac{h}{1}u'_1,$$

$$A_m = u_0.$$

Faisons la somme de ces égalités en observant que

$$F(x) = u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \dots + u_1 + u_0,$$
$$F'(x) = u'_m + u'_{m-1} + u'_{m-2} + \dots + u'_1,$$
$$F''(x) = u''_m + u''_{m-1} + u''_{m-2} + \dots + u''_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F^{(m)}(x) = u_m^{(m)};$$

nous aurons la formule proposée.

Application. — Que devient, pour $x = 2 + h$, la fonction

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1\ ?$$

D'après la formule de Taylor,

$$F(2 + h) = F(2) + hF'(2) + \frac{h^2}{1.2}F''(2) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(2).$$

Les coefficients de $F(x)$ étant entiers, ceux de $F''(x)$ doivent être divisibles par 2, et ceux de $F'''(x)$ par 6, car le développement de $F(2 + h)$ ne peut renfermer de fraction ; de plus $\frac{F''(x)}{1.2}$ est la moitié de la dérivée de $F'(x)$, et $\frac{F'''(x)}{1.2.3}$ est le tiers de la dérivée de $\frac{F''(x)}{1.2}$. En appliquant ces remarques on trouve facilement :

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1, \quad \text{d'où} \quad F(2) = 1\,;$$
$$F'(x) = 3x^2 - 8x + 5, \quad \text{»} \quad F'(2) = 1\,;$$
$$\frac{F''(x)}{1.2} = 3x - 4, \quad \text{»} \quad \frac{F''(2)}{1.2} = 2\,;$$
$$\frac{F'''(x)}{1.2.3} = 1, \quad \text{»} \quad \frac{F'''(2)}{1.2.3} = 1\,;$$

Par conséquent

$$F(2 + h) = 1 + h + 2h^2 + h^3.$$

108. Dérivée d'un produit. — *La dérivée d'un produit est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs.*

Soit, par exemple, un produit de trois fonctions

$$\varphi(x) = F(x)F_1(x)F_2(x).$$

Nous aurons

$$\varphi(x+h) = F(x+h)F_1(x+h)F_2(x+h);$$

d'où, en appliquant la formule de Taylor,

$$\varphi(x) + h\varphi'(x) + \ldots$$
$$= [F(x) + hF'(x) + \ldots][F_1(x) + hF'_1(x) + \ldots][F_2(x) + hF'_2(x) + \ldots].$$

Identifions les coefficients de h dans les deux membres : il vient

$$\varphi'(x) = F'(x)F_1(x)F_2(x) + F'_1(x)F(x)F_2(x) + F'_2(x)F(x)F_1(x).$$

109. Dérivée d'une puissance. — *Pour dériver une puissance de fonction, il suffit de multiplier la puissance par son exposant et par la dérivée de la fonction et de diminuer de 1 l'exposant de la puissance.*

En effet, la dérivée du produit de n facteurs égaux à $F(x)$, d'après le théorème précédent, comprend n termes égaux à la dérivée $F'(x)$ de chaque facteur multipliée par le produit des $n-1$ autres facteurs.

Application. — La dérivée de

$$(3x^2-1)^4(5-2x)^5(7x^2-4x+2)$$

est

$$4.3.2x(3x^2-1)^3(5-2x)^5(7x^2-4x+2)$$
$$-5.2(5-2x)^4(3x^2-1)^4(7x^2-4x+2)$$
$$+(14x-4)(3x^2-1)^4(5-2x)^5.$$

110. Théorème. — *La dérivée d'une fonction entière est la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement de la variable lorsque ce dernier tend vers zéro.*

En effet, de la formule

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots,$$

on déduit

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2}F''(x) + \ldots,$$

puis lorsqu'on fait tendre h vers zéro :

$$\lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x).$$

111. Dérivée d'une fonction quelconque. — Si $F(x)$ est une fonction quelconque, l'égalité précédente sert à définir la dérivée de $F(x)$:

On appelle dérivée d'une fonction $F(x)$ *la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable lorsque ce dernier tend vers zéro.*

Cette dérivée est égale au coefficient angulaire de la tangente menée à la courbe représentée par l'équation $y = F(x)$.

Pour démontrer cette propriété, soient x, y et $x + h$, $y + k$ les coordonnées de deux points M, M' de la courbe (*fig.* 12). Le

Fig. 12.

coefficient angulaire de la sécante MM' est égal au quotient de la différence k des coordonnées des points M, M', divisée par la différence h de leurs abscisses, ou égal à

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Si, M restant fixe, M' se rapproche sur la courbe indéfiniment de M, la sécante MM' tend vers une position-limite MT, qu'on appelle la *tangente* au point M de la courbe. Le coefficient angulaire de la tangente MT est donc la limite du rapport $\frac{k}{h}$ lorsque h tend vers zéro; il est donc égal à la dérivée $F'(x)$.

Si l'on désigne par X, Y les coordonnées courantes, l'équation de la tangente est

$$Y - y = F'(x)(X - x).$$

En coordonnées rectangulaires, la dérivée $F'(x)$ est égale à la tangente trigonométrique de l'angle de la tangente avec OX.

112. Théorème. — *Une fonction entière réelle* $F(x)$ *est croissante pour* $x = a$ *si* $F'(a) > 0$; *elle est décroissante si* $F'(a) < 0$.

Lorsque F'(a) = 0 *et* F''(a) > 0 ou < 0, F(a) *est respectivement un minimum ou un maximum.*

Soit h une quantité positive aussi petite qu'on veut. On a (**107**)

$$\left.\begin{aligned} F(a+h) - F(a) &= hF'(a) + \frac{h^2}{1.2}F''(a) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(a) + \dots \\ F(a-h) - F(a) &= -hF'(a) + \frac{h^2}{1.2}F''(a) - \frac{h^3}{1.2.3}F'''(a) + \dots \end{aligned}\right\} (1)$$

Le second membre de chacune de ces égalités a le signe du premier terme (**96**). Nous distinguerons plusieurs cas.

1° $F'(a) > 0$. Alors

$$F(a+h) - F(a) > 0, \quad F(a-h) - F(a) < 0,$$

ou

$$F(a-h) < F(a) < F(a+h);$$

donc la fonction croît avec x dans l'intervalle $(a-h,\ a+h)$.

2° $F'(a) < 0$. On trouve

$$F(a-h) > F(a) > F(a+h);$$

donc la fonction décroît dans l'intervalle $(a-h,\ a+h)$.

3° $F'(a) = 0$, $F''(a) \neq 0$. Les égalités (1) deviennent

$$F(a \pm h) - F(a) = \frac{h^2}{1.2}F''(a) \pm \frac{h^3}{1.2.3}F'''(a) + \dots$$

Le signe du second membre est celui de $F''(a)$ (**96**).

Si $F''(a) > 0$, on a

$$F(a+h) > F(a), \quad F(a-h) > F(a);$$

donc la fonction décroît dans l'intervalle $(a-h,\ a)$ et croît dans l'intervalle $(a,\ a+h)$, et l'on dit que $F(a)$ est un *mininum* de $F(x)$.

Si $F''(a) < 0$, la fonction croît dans l'intervalle $(a-h,\ a)$ et décroît dans l'intervalle $(a,\ a+h)$; $F(a)$ est un *maximum* de $F(x)$.

Remarque. — Si

$$F'(a) = 0, \quad F''(a) = 0, \quad \dots \quad F^{(p-1)}(a) = 0, \quad F^{(p)}(a) \neq 0,$$

on a les conclusions suivantes :

1° p impair. La fonction est croissante ou décroissante dans l'intervalle $(a-h,\ a+h)$ suivant que $F^{(p)}(a) >$ ou < 0.

2° p pair. $F(a)$ est un maximum ou un minimum suivant que $F^{(p)}(a) <$ 0 ou > 0.

La démonstration est la même que ci-dessus.

113. Application. — Discuter la fonction

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3. \qquad (1)$$

On a

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3),$$
$$y'' = 6x - 12.$$

La dérivée y' étant positive pour $x < 1$ ou > 3, et négative pour $1 < x < 3$, y croît dans l'intervalle $(-\infty, 1)$, décroît dans l'intervalle $(1, 3)$, puis croît constamment à partir de $x = 3$. Il résulte de là que y est maximum pour $x = 1$, minimum pour $x = 3$; d'ailleurs, la dérivée y' s'annule pour $x = 1$ et pour $x = 3$, et y'' est respectivement négative et positive.

Le signe de y, pour des valeurs réelles de x dont le module est suffisamment grand, se déduit aussi du théorème (**95**).

Ces différents résultats s'interprètent facilement sur la courbe représentative de la fonction.

Exercices et notes.

1. Trouver une valeur positive de x à partir de laquelle le polynome

$$4x^7 + 4x^6 - 15x^5 - 8x^3 + 3$$

soit constamment positif.

2. Trouver les deux premières dérivées des fonctions

$$(5x^2 + 4x - 7)(3x + 5)(4x - 3), \quad (5x^2 + x - 3)^3.$$

3. Discuter la fonction $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 1$.

4. Construire les courbes représentées par les équations

$$y = (x-1)(x-2)(x-3),$$
$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3),$$
$$y = (x-1)(x-3)^2,$$
$$y = (x-1)(x^2+1),$$
$$y^2 = (x-1)(x^2+1).$$

5. Soit $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$; démontrer que

$$F'(a) + F'(b) + F'(c) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

6. Soit $F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$; on a

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \dots + \frac{1}{x-l}.$$

CHAPITRE V.

PRINCIPES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

—

Division d'une fonction entière par $x - a$.

114. Théorème. — *Le reste de la division d'une fonction entière* F(x), *par un binome* x — a, *est égal à* F(a).

Si l'on continue la division jusqu'à ce que l'on arrive à un reste R indépendant de x, on aura, en désignant par $f(x)$ le quotient, l'*identité*

$$F(x) = (x - a)f(x) + R.$$

Si l'on y remplace x par a, on trouve $F(a) = R$.

Corollaire. — *Pour que* F(x) *soit divisible par* x — a, *il faut et il suffit que l'on ait* F(a) = 0.

Remarque. — On a $F(x) = F(a + \overline{x - a})$; en appliquant la formule de Taylor à $F(a + \overline{x - a})$ on trouve

$$F(x) = F(a) + (x - a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^m}{m!}F^{(m)}(a).$$

Il résulte de là que le reste de la division de $F(x)$ par $(x - a)^p$, où $p < m$, est

$$F(a) + (x - a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}F^{(p-1)}(a).$$

115. Théorème. — *Si une fonction entière* F(x) *est divisible séparément par* $(x - a)^p$, $(x - b)^q$, $(x - c)^r$, ..., *elle est divisible par le produit*

$$(x - a)^p\,(x - b)^q\,(x - c)^r \ldots .$$

a, b, c ... sont des nombres distincts; p, q, r ... sont les exposants des plus hautes puissances de $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... qui divisent $F(x)$.

Par hypothèse,

$$F(x) = (x - a)^p F_1(x), \tag{1}$$

$F_1(x)$ étant une fonction entière. Remplaçons dans cette égalité x par b; puisque $F(b) = 0$, il vient

$$(b - a)^p F_1(b) = 0;$$

d'où, à cause de $b - a \neq 0$, $F_1(b) = 0$. Donc $F_1(x)$ est divisible par $x - b$; si $(x - b)^{q'}$ est la plus haute puissance de $x - b$ qui divise $F_1(x)$, on peut poser

$$F_1(x) = (x - b)^{q'} F_2(x), \quad \text{avec} \quad F_2(b) \neq 0.$$

L'identité (1) donne alors

$$F(x) = (x - a)^p (x - b)^{q'} F_2(x). \tag{2}$$

On a nécessairement $q = q'$; car, par hypothèse,

$$F(x) = (x - b)^q \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \varphi(b) \neq 0,$$

et si l'on avait par exemple $q > q'$, on trouverait en égalant les dernières valeurs de $F(x)$ et en simplifiant l'identité résultante par le facteur $(x - b)^{q'}$:

$$(x - a)^p F_2(x) = (x - b)^{q - q'} \varphi(x),$$

égalité impossible puisque le second membre est nul pour la valeur $x = b$ qui n'annule pas le premier membre.

On a donc $q = q'$; par suite

$$F(x) = (x - a)^p (x - b)^q F_2(x). \tag{3}$$

Remplaçons x par c; comme $F(c) = 0$, $c - a \neq 0$, $c - b \neq 0$, on voit que $F_2(c) = 0$. $F_2(x)$ est donc divisible par $x - c$; si r' est l'exposant de la plus haute puissance de $x - c$ qui divise $F_2(x)$, on a

$$F_2(x) = (x - c)^{r'} F_3(x),$$

d'où

$$F(x) = (x - a)^p (x - b)^q (x - c)^{r'} F_3(x).$$

On prouve facilement que $r = r'$, etc.

Remarque. — On démontre de la même manière le théorème suivant : *Si une fonction entière des variables* x, y, z *est divi-*

sible séparément par x — y, y — z, z — x, *etc.*, *elle est divisible par le produit* (x — y) (y — z) (z — x) ....

116. Quotient de la division de F(x) **par** $x - a$. — Soit

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m .$$

Le quotient cherché étant de degré $m - 1$, représentons-le par

$$B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \dots + B_{m-2} x + B_{m-1} .$$

Si R est le reste de la division, nous aurons l'*identité*

$$A_0 x^m + \dots + A_m = (x - a)(B_0 x^{m-1} + \dots + B_{m-1}) + R .$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres on trouve

$$B_0 = A_0, \quad B_1 - aB_0 = A_1, \quad B_2 - aB_1 = A_2, \dots$$
$$B_{m-1} - aB_{m-2} = A_{m-1}, \quad R - aB_{m-1} = A_m .$$

De ces égalités on tire successivement les valeurs de B_0, B_1, B_2, ... B_{m-1}, R; il en résulte la règle :

Le premier coefficient du quotient est égal au premier coefficient du dividende; le p^e *coefficient du quotient s'obtient en multipliant le coefficient précédent du quotient par* a *et en ajoutant à ce produit le* p^e *coefficient du dividende. Le reste s'obtient en multipliant le dernier coefficient du quotient par* a *et en ajoutant à ce produit le dernier coefficient du dividende.*

Application. — Dans les applications numériques, on écrit sur une première ligne les coefficients de F(x) en tenant compte des *lacunes*, c'est-à-dire en attribuant le coefficient 0 aux termes qui manquent; sur une seconde ligne, on écrit les coefficients du quotient et le reste calculés d'après la règle précédente.

Soit, par exemple, à diviser $2x^5 + 4x^4 - 7x^2 + 8x - 5$ par $x - 2$.

Coeff. du dividende : 2, 4, 0, — 7, 8, — 5

Coeff. du quotient : 2, 8, 16, 25, 58 | 111.

Quotient : $2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 25x + 58$; *Reste* : 111.

117. Valeur numérique d'un polynome donné. — Pour trouver la valeur d'un polynome F(x) pour $x = a$, on cherche par la règle précédente les coefficients B_0, B_1, ... du quotient et le reste R de la division de F(x) par $x - a$; R est le nombre cherché F(a).

Soit à trouver, pour $x = -3$, la valeur du polynome

$$3x^6 - 7x^4 - 4x + 3.$$

Coeff. du polynome : 3, 0, —7, 0, 0, —4, 3.
Quotient par x + 3 : 3, —9, 20, —60, 180, —544 1635.

Le nombre cherché est 1635.

Pour démontrer *directement* ce procédé, il suffit d'écrire les valeurs explicites des nombres calculés. Désignons ces nombres par F_0, F_1, ..., F_m, et écrivons x au lieu de a ; nous aurons

$$F_0 = A_0,$$
$$F_1 = A_0x + A_1,$$
$$F_2 = A_0x^2 + A_1x + A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{m-1} = A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$
$$F_m = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

Les polynomes F_m, F_{m-1}, F_{m-2}, ... sont appelés *fonctions de Laguerre.*

Nombre des racines d'une équation.

On appelle *racine* d'une équation $F(x) = 0$, *racine* ou *zéro* de la fonction $F(x)$ toute valeur de x qui annule cette fonction.

118. Théorème fondamental. — *Toute équation algébrique entière, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine réelle ou imaginaire.*

Nous admettons cette proposition comme postulatum.

Remarque. — Le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi (**114**) : *Toute fonction entière admet au moins un diviseur de la forme* x — a.

119. Théorème. — *Toute fonction entière*

$$F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

peut se mettre sous la forme

$$A_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m).$$

En effet, $F(x)$ admettant au moins un diviseur de la forme $x - a_1$, on peut écrire

$$F(x) = (x - a_1)F_1(x),$$

$F_1(x)$ étant un polynome dont le premier terme est A_0x^{m-1}.

$F_1(x)$ admet au moins un diviseur linéaire $x - a_2$; soit

$$F_1(x) = (x - a_2)F_2(x).$$

En continuant ainsi, on parvient à une fonction du second degré ayant pour premier terme A_0x^2 et se décomposant en $A_0(x - a_{m-1})(x - a_m)$. De ces diverses égalités, on conclut

$$F(x) \equiv A_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m).$$

120. Théorème. — *Toute équation de degré* m *a* m *racines.*

Soit l'équation

$$F(x) \equiv A_0x^m + A_2x^{m-1} + \ldots + A_m = 0.$$

On vient de trouver

$$F(x) \equiv A_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m).$$

Supposons d'abord les nombres $a_1, a_2, \ldots a_m$ distincts. L'identité précédente montre que l'équation $F(x) = 0$ admet pour racines $a_1, a_2, \ldots a_n$ et n'admet pas d'autre racine (**16**).

Supposons ensuite que plusieurs des facteurs $x-a_1$ $x-a_2, \ldots$, soient égaux entre eux, et soit

$$F(x) = A_0(x - a_1)^\alpha(x - a_2)^\beta(x - a_3)^\gamma \ldots,$$

la somme des exposants $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ étant égale à m. Nous disons, dans ce cas, que l'équation admet α fois la racine a_1, β fois la racine $a_2, \ldots$; nous aurons ainsi encore m racines.

On ne pourrait avoir une autre décomposition, telle que

$$F(x) \equiv A_0(x - a_1)^{\alpha'}(x - a_2)^{\beta'}(x - a_3)^{\gamma'} \ldots ;$$

car il en résulterait l'identité

$$A_0(x - a_1)^\alpha(x - a_2)^\beta(x - a_3)^\gamma \ldots \equiv A_0(x - a_1)^{\alpha'}(x - a_2)^{\beta'}(x - a_3)^{\gamma'} \ldots$$

ou, si l'on avait $\alpha > \alpha'$:

$$(x - a_1)^{\alpha-\alpha'}(x - a_2)^\beta(x - a_3)^\gamma \ldots \equiv (x - a_2)^{\beta'}(x - a_3)^{\gamma'} \ldots ;$$

mais la dernière égalité est impossible puisque le premier membre est nul pour $x = a_1$ tandis que le second ne l'est pas.

121. Principe d'identité. — 1° *Si une fonction* F(x) *de dégré* m *s'annule pour plus de* m *valeurs de la variable, tous ses coefficients sont nuls.*

En effet, si quelques coefficients de $F(x)$ n'étaient pas nuls, l'équation $F(x) = 0$ admettrait plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré.

2° *Deux polynomes* $F(x)$, $f(x)$ *ne peuvent être égaux pour plus de valeurs de* x *qu'il n'y a d'unités dans le degré de celui de ces polynomes qui a le degré le plus élevé, sans être complétement identiques.*

En effet, soit

$$F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots A_mx^m,$$
$$f(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots B_nx^n,$$

m étant égal ou supérieur à n. Si pour $m+1$ nombres distincts $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ on pouvait avoir

$$F(\alpha_1) = f(\alpha_1), \quad F(\alpha_2) = f(\alpha_2), \quad \dots \quad F(\alpha_{m+1}) = f(\alpha_{m+1}),$$

l'équation

$$F(x) - f(x) \equiv A_0 - B_0 + (A_1 - B_1)x + (A_2 - B_2)x^2 + \dots = 0$$

aurait plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré; ce qui exige

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \dots .$$

122. Théorème. — *Si une équation algébrique à coefficients réels admet* p *fois une racine imaginaire* $\alpha + \beta i$, *elle admet aussi* p *fois la racine conjuguée* $\alpha - \beta i$.

Soit l'équation $F(x) = 0$, à coefficients réels. On a (**24**)

$$F(\alpha + \beta i) = P + Q\beta i, \quad F(\alpha - \beta i) = P - Q\beta i;$$

$\alpha + \beta i$ étant racine, on a nécessairement $P = 0$, $Q = 0$, d'où l'on conclut $F(\alpha - \beta i) = 0$, de sorte que $\alpha - \beta i$ est également racine.

$F(x)$ étant divisible par $x - (\alpha + \beta i)$ et par $x - (\alpha - \beta i)$ est divisible par le produit de ces binomes ou par $x - \alpha)^2 + \beta^2$; le quotient est un polynome réel $F_1(x)$, et l'on a

$$F(x) \equiv [(x - \alpha)^2 + \beta^2]F_1(x).$$

Si $\alpha + \beta i$ est racine multiple de $F(x)$, il est encore racine de $F_1(x)$; donc $\alpha - \beta i$, d'après ce qui vient d'être démontré, est également racine de $F_1(x)$, et l'on peut écrire

$$F_1(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]F_2(x), \quad \text{d'où} \quad F(x) \equiv [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2F_2(x) \dots$$

En continuant ainsi, on trouve, dans le cas où $\alpha + \beta i$ est p fois racine de $F(x)$,

$$F(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p F_p(x).$$

Donc $\alpha - \beta i$ est au moins p fois racine. Il ne peut être plus de p fois racine, car $\alpha + \beta i$ serait au moins le même nombre de fois racine, ce qui est contraire à l'hypothèse.

123. Théorème. — *Un polynome réel* F(x) *est un produit de facteurs réels du premier ou du second degré.*

Soient $a, b, \ldots l$ les racines de l'équation $F(x) = 0$. On a

$$F(x) \equiv A_0(x - a)(x - b) \ldots (x - l).$$

Si toutes les racines sont réelles, le théorème est démontré. Si p racines sont égales à $\alpha + \beta i$, p autres sont égales à $\alpha - \beta i$, et le produit des facteurs correspondants de $F(x)$ est

$$[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p.$$

Relations entre les coefficients et les racines d'une équation.

124. Théorème. — *Soient* a, b, .., l *les racines de l'équation*

$$F(x) \equiv x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 ;$$

on a les relations

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + \ldots + l = -A_1, \\ ab + ac + \ldots + kl = A_2, \\ abc + abd + \ldots + ikl = -A_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ abc \ldots kl = (-1)^m A_m. \end{array}\right\} \quad (1)$$

En effet, $F(x)$ est identiquement égal au produit

$$(x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - l),$$

qui a pour développement

$$x^m - x^{m-1}\Sigma a + x^{m-2}\Sigma ab - x^{m-3}\Sigma abc + \ldots + (-1)^m abc \ldots l.$$

125. Remarque. — Les relations (1), au nombre de m, ne peuvent servir à déterminer une des racines en particulier. En effet, si on élimine $b, c, \ldots l$, on obtient une équation en a ; soit

$\varphi(a) = 0$ cette équation. Comme les relations (1) sont symétriques par rapport aux racines, l'élimination de $a, c, \ldots l$ doit conduire à l'équation $\varphi(b) = 0$. En continuant ainsi on voit que l'équation $\varphi(x) = 0$ a pour racines $a, b, \ldots l$; elle est donc identique à l'équation proposée $F(x) = 0$.

Cette conclusion peut être vérifiée d'une manière bien simple. Car, si on ajoute les égalités (1) après les avoir multipliées respectivement par $-a^{m-1}, a^{m-2}, -a^{m-3}, \ldots (-1)^m$, on trouve

$$-a^m = A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}a + A_m,$$

ou $F(a) = 0$.

126. Application. — Les relations (1) peuvent faciliter la résolution de certaines questions qu'on peut se proposer sur les racines d'une équation. Soit, par exemple, à trouver la condition nécessaire pour qu'une racine de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

soit égale à la somme des deux autres.

Si a, b, c sont les trois racines, on a

$$\begin{aligned} b + c &= a, \\ a + b + c &= -p, \\ ab + ac + bc &= q, \\ abc &= -r. \end{aligned}$$

Les deux premières égalités donnent

$$a = b + c = -\frac{p}{2};$$

en exprimant que $-\frac{p}{2}$ est racine de l'équation proposée, on trouve la condition cherchée :

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

Les valeurs de b et c résultent des égalités

$$b + c = a = -\frac{p}{2}, \quad bc = -\frac{r}{a} = \frac{2r}{p};$$

donc b et c sont racines de l'équation du second degré

$$u^2 + \frac{p}{2}u + \frac{2r}{p} = 0.$$

PRINCIPE DE SUBSTITUTION. — CONSÉQUENCES.

127. Théorème. — *Soit* F(x) *une fonction réelle, continue dans l'intervalle* (a, b). *Si* F(a) *et* F(b) *sont de signes contraires, l'équation* F(x) = 0 *a au moins une racine comprise entre* a *et* b.

En effet, si x varie d'une manière continue depuis la valeur $x = a$ jusqu'à la valeur $x = b$, $F(x)$ variera aussi d'une manière continue en passant de la valeur $F(a)$ à la valeur $F(b)$ qui a un signe contraire. A cause de la continuité, $F(x)$ ne peut changer de signe qu'en passant par la valeur zéro.

La construction de la courbe représentée par l'équation $y = F(x)$ rend le théorème intuitif. Aux abscisses a et b correspondent deux points A et B situés de part et d'autre de l'axe OX; la courbe restant à une distance finie de cet axe et offrant un trait ininterrompu entre A et B, doit traverser une ou plusieurs fois l'axe OX; l'abscisse de chacun des points d'intersection avec OX est racine de $F(x)$.

Remarque. — *Une fonction réelle* F(x) *qui est continue dans l'intervalle* (a, b), *passe par toutes les valeurs intermédiaires entre* F(a) et F(b) *quand* x *varie d'une manière continue depuis la valeur* x = a *jusqu'à la valeur* x = b.

La courbe représentative de la fonction rend encore cette proposition intuitive. D'ailleurs, celle-ci comprend le théorème précédent comme cas particulier.

128. Applications. — I. Soient $x_1, x_2, \ldots x_6$ six nombres différents, rangés dans l'ordre de grandeur décroissante. L'équation

$$F(x) \equiv (x - x_1)(x - x_3)(x - x_5) + \gamma^2(x - x_2)(x - x_4)(x - x_6) = 0$$

a trois racines réelles. En effet,

$$F(x_1) = \gamma^2(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_1 - x_6) > 0,$$
$$F(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_5) < 0;$$

donc l'équation $F(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre x_1 et x_2. On démontre de même qu'il existe au moins une racine entre x_3 et x_4, et au moins une entre x_5 et x_6. Comme l'équation n'a que trois racines, chacun des intervalles (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6) comprend une seule racine.

II. L'équation

$$F(x) \equiv \frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \dots + \frac{L^2}{x-l} - M^2 = 0$$

a toutes ses racines réelles. Car, si l'on suppose

$$a < b < c \dots < l,$$

$F(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, ε désignant un nombre positif aussi petit qu'on veut ; or

$$F(a + \varepsilon) = \frac{A^2}{\varepsilon} + \frac{B^2}{a - b + \varepsilon} + \dots + \frac{L^2}{a - l + \varepsilon} - M^2 > 0,$$

$$F(b - \varepsilon) = \frac{A^2}{b - a - \varepsilon} - \frac{B^2}{\varepsilon} + \dots + \frac{L^2}{b - l - \varepsilon} - M^2 < 0,$$

puisque les termes $\frac{A^2}{\varepsilon}$, $\frac{B^2}{\varepsilon}$ dont les valeurs sont aussi grandes qu'on veut, donnent leur signe ; par conséquent, $F(x)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. On verrait de la même manière que cette fonction a au moins une racine dans chacun des intervalles (b, c), ... (k, l). Enfin, comme $F(l + \varepsilon) > 0$, $F(\infty) < 0$, il existe au moins une racine de $F(x)$ supérieure à l. Le nombre des racines réelles dont l'existence est certaine, est précisément égal au degré de l'équation $F(x) = 0$ rendue entière ; donc, etc.

On peut démontrer autrement que l'équation proposée n'a pas de racines imaginaires. En effet, si $\alpha + \beta i$ est racine, $\alpha - \beta i$ est également racine ; or, de

$$F(\alpha + \beta i) = \Sigma \frac{A^2}{\alpha - a + \beta i} - M^2 = 0, \quad F(\alpha - \beta i) = \Sigma \frac{A^2}{\alpha - a - \beta i} - M^2 = 0,$$

on tire, par soustraction,

$$\Sigma A^2 \left(\frac{1}{\alpha - a + \beta i} - \frac{1}{\alpha - a - \beta i} \right) = 0, \quad \text{ou} \quad 2i\beta \Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = 0,$$

égalité impossible.

129. Théorème. — *Si deux quantités α et β comprennent entre elles un nombre impair de racines d'une racine algébrique réelle* $F(x) = 0$, *ces quantités, substituées à* x *dans* $F(x)$, *donnent des résultats de signes contraires ; si elles comprennent*

un nombre pair de racines, les résultats de substitution sont de même signe.

Supposons que l'intervalle (α, β) comprenne p racines $a, b, \ldots g$. Nous pouvons écrire

$$F(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - g)\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une constante ou une fonction entière. Dans le second cas,

$$F(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b) \ldots (\alpha - g)\varphi(\alpha),$$
$$F(\beta) = (\beta - a)(\beta - b) \ldots (\beta - g)\varphi(\beta);$$

puis

$$\frac{F(\alpha)}{F(\beta)} = \frac{\alpha - a}{\beta - a} \cdot \frac{\alpha - b}{\beta - b} \cdots \frac{\alpha - g}{\beta - g} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}.$$

$\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ sont de même signe, sans quoi l'équation $\varphi(x) = 0$ aurait au moins une racine entre α et β, et $a, b, \ldots g$ ne seraient pas toutes les racines de $F(x)$ comprises entre α et β. Les p fractions

$$\frac{\alpha - a}{\beta - a}, \quad \frac{\alpha - b}{\beta - b}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha - g}{\beta - g}$$

sont négatives; donc le quotient $F(\alpha) : F(\beta)$ est positif ou négatif suivant que p est pair ou impair ; ce qui démontre le théorème.

Si α et β ne comprennent entre eux aucune racine de $F(x)$, $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ sont de même signe.

Corollaire. — *Lorsque* x *variant d'une manière continue passe par une racine de l'équation* $F(x) = 0$, *la fonction* $F(x)$ *change de signe ou non, suivant que le degré de multiplicité de cette racine est impair ou pair.*

Soit a une racine d'ordre p; si ε désigne un nombre aussi petit qu'on veut, l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ comprend p racines égales à a. Donc $F(a - \varepsilon)$ et $F(a + \varepsilon)$ sont de signes contraires ou de même signe suivant que p est impair ou pair.

130. Théorème. — *Si deux nombres α et β, substitués à* x *dans le premier membre d'une équation algébrique réelle, donnent des résultats de signes contraires, ces nombres comprennent entre eux un nombre impair de racines de l'équation ; si les résultats de substitution ont le même signe, α et β comprennent un nombre pair de racines ou n'en comprennent aucune.*

Ce théorème est le réciproque du précédent.

131. Théorème. — 1° *Toute équation algébrique de degré impair, à coefficients réels, a au moins une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.*

2° *Toute équation algébrique de degré pair, à coefficients réels et dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines reelles, l'une positive, l'autre negative.*

On suppose le premier terme de l'équation positif et le terme indépendant différent de zéro.

1° Soit l'équation de degré impair

$$F(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0.$$

On a (**95**)

$$F(-\infty) = -\infty, \quad F(0) = A_m, \quad F(+\infty) = +\infty;$$

donc, suivant que A_m est positif ou négatif, l'équation a un nombre impair de racines entre $-\infty$ et 0, ou entre 0 et $+\infty$.

2° Si l'équation est de degré pair, on a

$$F(-\infty) = +\infty, \quad F(0) = A_m, \quad F(+\infty) = +\infty;$$

donc, si $A_m < 0$, l'équation a un nombre impair de racines entre $-\infty$ et 0, et un nombre impair de racines entre 0 et $+\infty$.

Si $A_m > 0$, l'équation a un nombre pair de racines positives et un nombre pair de racines négatives, 0 étant considéré comme un nombre pair.

Exercices et notes.

1. Déterminer a de manière que $x-2$ divise le polynome

$$x^4 - 7x^3 + ax^2 - 6x + 4.$$

2. Déterminer a par la condition que 2 soit racine de l'équation

$$x^3 - 4x^2 + ax + 6 = 0,$$

et trouver les deux autres racines. ($a = 1$; les autres racines sont -1, 3).

3. Déterminer a et b de manière que le polynome

$$2x^4 + ax^3 + 127x^2 + bx + 180$$

soit divisible par le produit $(x-2)(x-3)$. ($a = -27$, $b = -252$).

4. Trouver une valeur de m qui rende le polynome

$$x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$$

divisible par $x + y + z$ et déterminer le quotient.

Le polynome s'annulant pour $x = -(y+z)$, on trouve la condition $yz(y+z)(m+3) = 0$; d'où $y = 0$, ou $z = 0$, ou $y = -z$, ou $m = -3$.
Il est utile de remarquer l'identité

$$\Sigma x^3 - 3xyz = \Sigma x(\Sigma x^2 - \Sigma xy) = \frac{1}{2}\Sigma x \Sigma (x-y)^2. \qquad (1)$$

On en conclut que la relation $x+y+z=0$ entraine l'égalité

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz;$$

et que

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

5. Rendre rationnelle l'équation

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0.$$

On peut s'appuyer sur l'égalité (1) de l'exercice précédent; l'équation cherchée est $(x+y+z)^3 = 27xyz$.
6. Déterminer m par la condition que $x+y+z$ divise le polynome

$$x^4 + y^4 + z^4 + m(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

On trouve $m = -2$, puis

$$\Sigma x^4 - 2\Sigma x^2y^2 = -(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Cette identité est souvent utile. Elle montre que l'égalité $x \pm y \pm z = 0$ entraine celle-ci : $\Sigma x^4 - 2\Sigma x^2y^2 = 0$; que l'équation

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0,$$

rendue rationnelle, devient $\Sigma x^2 - 2\Sigma xy = 0$.

7. $$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

est divisible par $x(x+1)(2x+1)$.

8. $$(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$$

est divisible par $(x+y)(y+z)(z+x)$.

9. $$(\cos a + x \sin a)^m - (\cos ma + x \sin ma)$$

est divisible par x^2+1. (Employer la formule de Moivre).
10. Les polynomes

$$y^pz^q + z^px^q + x^py^q - y^qz^p - z^qx^p - x^qy^p,$$
$$x^py^qz^r + y^pz^qx^r + z^px^qy^r - x^py^rz^q - y^pz^rx^q - z^px^ry^q$$

sont divisibles par le produit $(y-z)(z-x)(x-y)$.
11. Démontrer que les polynomes

$$F(x) = x^{3m} + x^{3p+1} + x^{3q+2},$$
$$F_1(x) = (1+x)^{6m+1} - (1+x)^{6p+2} - 1$$

sont divisibles par x^2+x+1.

Soit θ une racine de $x^2 + x + 1 = 0$; c'est aussi une racine de $x^3 - 1 = 0$, de sorte que $\theta^3 = 1$, $\theta^{3n} = 1$. On vérifie que $F(\theta) = 0$, etc.

12. Le polynome

$$F(x) = (x + 1)^{6m+1} - x^{6m+1} - 1$$

est divisible par $(x^2 + x + 1)^2$.

Le reste de $F(x)$ par $(x - a)^2$ est $F(a) + (x - a)F'(a)$; on a ici $F(\theta) = 0$, $F'(\theta) = 0$.

13. $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ est divisible par $(x - 1)^2$.

14. $x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$ est divisible par $(x - 1)^4$

15. Déterminer m et n par la condition que

$$x^p + mx^{p-q}y^q + nx^{p-2q}y^{2q} + y^p$$

soit divisible par $(x + y)^2$.

16. Trouver le reste de la division d'une fonction entière $F(x)$ par le produit $(x - a)(x - b)$.

Dans l'identité $F(x) = (x - a)(x - b)f(x) + Ax + B$, on fait successivement $x = a$, $x = b$.

17. Si une équation à coefficients commensurables admet la racine $a + \sqrt{b}$, elle admet aussi la racine $a - \sqrt{b}$.

18. Si $\alpha + \beta i$ est racine de $F(x) + if(x) = 0$, $\alpha - \beta i$ est racine de $F(x) - if(x) = 0$, $F(x)$ et $f(x)$ désignant des fonctions entières réelles.

19. Si les racines d'une équation du 3ᵉ degré sont a^2, b^2, $2ab$, les racines de l'équation dérivée sont rationnelles.

20. Trouver la condition nécessaire pour qu'une racine de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

soit moyenne proportionnelle entre les deux autres ; pour que les racines soient les côtés d'un triangle rectangle, les tangentes ou les cosinus des angles d'un triangle quelconque ; pour qu'elles soient en progression géométrique.

21. Résoudre l'équation

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0,$$

sachant que les racines sont en progression arithmétique.

22. a, b, c étant les racines de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, former l'équation du 3ᵉ degré ayant pour racines

$$y_1 = -a + b + c,\ y_2 = a - b + c,\ y_3 = a + b - c.$$

Calculer $y_1 + y_2 + y_3$, $y_1y_2 + y_3y_3 + y_3y_1$, $y_1y_2y_3$, ou remplacer dans l'équation proposée x par $-\frac{1}{2}(p + y)$,

23 Etant donnée l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

exprimer que la somme de deux racines est égale à la somme des deux autres.

S'appuyer sur les relations (**124**), ou identifier l'équation avec

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \alpha\right)\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \beta\right) = 0.$$

La condition cherchée est $r = \frac{p}{2}\left(q - \frac{p^2}{4}\right)$.

24. Exprimer que la même équation a deux racines égales et de signes contraires.

25. En un point quelconque A de la courbe représentée par $y = x^3$, on mène la tangente, qui coupe de nouveau la courbe en B. Lieu du milieu de la droite AB (Réponse : $y^3 = 28x$). Démontrer que l'axe des y divise la corde AB dans un rapport constant. Lieu des milieux des cordes parallèles à la droite ayant pour équation $y = mx$ (Réponse : $y = 3mx - 8x^3$).

26. D'un point donné P, on peut mener trois normales à une parabole ; soient M, M′, M″ les points d'incidence. Le centre de gravité G du triangle MM′M″ est sur l'axe de la parabole ; si l'on prolonge PG de GH = 2PG, le point H est situé sur une droite fixe. Lorsque deux des normales sont rectangulaires, le lieu de P est une parabole. Le lieu d'un point P tel que $\overline{PM}^2 + \overline{PM'}^2 + \overline{PM''}^2 = a^2$, est une ellipse.

27. Décomposer en facteurs réels du second degré $x^4 + 1$, $x^6 + 1$.

$$x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1);$$
$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)$$
$$= (x^2 + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1).$$

Pour obtenir des décompositions rationnelles, on remplace x par $\frac{x\sqrt{2}}{y}$ ou $\frac{x\sqrt{3}}{y}$, ce qui donne

$$4x^4 + y^4 = (2x^2 + 2xy + y^2)(2x^2 - 2xy + y^2),$$
$$27x^6 + y^6 = (3x^2 + y^2)(3x^2 + 3xy + y^2)(3x^2 - 3xy + y^2).$$

De la première formule, on conclut que tout nombre de la forme $4x^4 + 1$ (en particulier $2^{4n+2} + 1$), excepté 5, est composé.

28. Décomposer en facteurs réels $x^{10} - 1$.

$$x^{10} - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1),$$
$$x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1 = (x^2 \pm \frac{1}{2}x + 1)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \ldots$$

29. Décomposer $x^{12} + 6^6y^{12}$ en trois facteurs rationnels du 4ᵉ degré.

30. Si $m = 6k \pm 3$, $x^2 + xy + y^2$ divise

$$(x + y)^m - x^m - y^m - 3(x + y)(xy)^{\frac{m-1}{2}}.$$

31. a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, calculer

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}, \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

32. Déterminer m de manière que l'équation

$$x^4 - x^2 + 2x + m = 0$$

ait deux racines dont la somme égale le produit.

33. Déterminer p de manière que deux racines de l'équation

$$3x^4 + px^3 + 2x^2 + 12x - 8 = 0$$

aient un produit égal à 2.

CHAPITRE VI.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. LIMITES DES RACINES.

—

Transformations élémentaires.

Transformer une équation F(x) = 0, *c'est en déduire une autre équation* f(y) = 0 *dont les racines aient, avec celles de* F(x) = 0, *une relation donnée d'avance.* L'équation $f(y) = 0$ est appelée la *transformée* de $F(x) = 0$.

132. Problème. — *Changer les signes des racines d'une équation*

$$F(x) \equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0.$$

Si x désigne une racine quelconque de $F(x) = 0$, et y la racine correspondante de la nouvelle équation, on doit avoir

$$y = -x. \quad F(x) = 0.$$

Eliminant x entre ces égalités on trouve l'équation cherchée

$$F(-y) = 0.$$

Si l'on remplace la lettre y par x, on peut dire que la nouvelle équation s'obtient en changeant x en $-x$ dans l'équation proposée.

Remarque. — Si l'équation $F(x) = 0$ ne renferme que des termes de degré pair, elle se confond avec sa *transformée en* $-x$; donc ses racines sont, deux à deux, égales et de signes contraires. On *abaisse le degré* d'une telle équation en prenant x^2 pour inconnue.

133. Problème. — *Multiplier, par un nombre donné* K, *les racines de* $F(x) = 0$.

Il faut éliminer x entre les équations

$$y = Kx, \quad F(x) = 0;$$

la transformée est donc $F\left(\frac{y}{K}\right) = 0$ ou

$$A_0 y^m + A_1 K y^{m-1} + A_2 K^2 y^{m-2} + \ldots + A_{m-1} K^{m-1} y + A_m K^m = 0.$$

Les coefficients de la transformée sont égaux à ceux de la proposée, multipliés par les puissances successives de K.

Exemple. — Soit à multiplier par 2 les racines de

$$3x^4 - 7x^2 + 8x - 9 = 0.$$

On trouve (en écrivant x au lieu de y) :

$$3x^4 - 28x^2 + 64x - 144 = 0.$$

Remarques. — I. Pour résoudre le problème précédent, on peut s'appuyer sur la composition des coefficients (**124**). Si l'on multiplie les racines de $F(x)$ par K, la somme des racines est multipliée par K, la somme de leurs produits deux à deux par K^2, etc. Il faut donc remplacer A_1 par KA_1 A_2 par K^2A_2, etc.

II. Pour diviser les racines par K, on change x en Ky ou plutôt en Kx, ce qui donne la transformée

$$A_0 K^m x^m + A_1 K^{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} Kx + A_m = 0.$$

134. Problème. — *Transformer une équation en une autre dont les coefficients soient entiers, et dont le premier terme ait pour coefficient l'unité.*

Soit

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

l'équation débarrassée de ses dénominateurs. Si on multiplie les racines par A_0, on obtient la transformée (**133**)

$$A_0x^m + A_1A_0x^{m-1} + A_2A_0^2x^{m-2} + \dots + A_mA_0^m = 0,$$

dont tous les coefficients sont divisibles par A_0.

Le problème admet souvent une solution plus simple.

Exemple. — $9x^4 - 27x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{12}x + 2 = 0.$

Multiplions les racines par K :

$$9x^4 - 27Kx^3 - \frac{5}{8}K^2x^2 - \frac{7}{12}K^3x + 2K^4 = 0.$$

Divisons cette équation par 9 et exprimons que les coefficients

$$\frac{5K^2}{8.9}, \quad \frac{7K^3}{12.9}, \quad \frac{2K^4}{9}$$

se réduisent à des nombres entiers. La plus petite valeur de K est 12 : la transformée correspondante est

$$x^4 - 36x^3 - 10x^2 - 112x + 4608 = 0.$$

135. Problème. — *Diminuer, d'une quantité donnée* h, *les racines d'une équation* F(x) = 0.

On doit avoir

$$y = x - h, \quad F(x) = 0;$$

éliminant x on trouve la transformée $F(h + y) = 0$, c'est-à-dire

$$F(h) + xF'(h) + \frac{x^2}{1.2}F''(h) + \dots + \frac{x^m}{m!}F^{(m)}(h) = 0,$$

où la lettre x remplace y.

La méthode suivante, due à Horner, est plus rapide quand il s'agit d'équations numériques. On divise $F(x)$ par $x - h$, le quotient par $x - h$, le second quotient par $x - h$ et ainsi de suite. Ces opérations donnent les identités suivantes :

$$\begin{aligned} F(x) &= (x - h)Q_1 + R_1, \\ Q_1 &= (x - h)Q_2 + R_2, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_{m-1} &= (x - h)Q_m + R_m. \end{aligned}$$

Éliminons $Q_1, Q_2, \dots Q_{m-1}$ en ajoutant ces relations membre à membre après avoir multiplié la seconde par $x - h$, la troisième par $(x - h)^2$, etc. Nous aurons l'identité

$$F(x) = R_1 + R_2(x - h) + R_3(x - h)^2 + \dots + Q_m(x - h)^m.$$

On en conclut, en remplaçant $x - h$ par x, l'équation cherchée :

$$R_1 + R_2 x + R_3 x^2 + \dots + Q_m x^m = 0.$$

Ainsi : *Pour diminuer de* h *toutes les racines d'une équation, on divise le premier membre par* x — h, *le quotient de cette division par* x — h, *le quotient de la seconde division par* x — h ; *et ainsi de suite. Le dernier quotient et les restes de ces divisions sont les coefficients de la transformée.*

Cette règle est analogue à celle qui sert à faire passer un nombre entier d'un système de numération dans un autre.

Application. — Diminuer de 2 les racines de l'équation

$$5x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x + 7 = 0.$$

Les divisions successives de $F(x)$ par $x - 2$ s'effectuent par le procédé rapide indiqué (116) :

Coefficients de $F(x)$	…	5,	— 4,	8,	— 3,	7.	
» Q_1	…	5,	6,	20,	37	$R_1 = 81.$	
» Q_2	…	5,	16,	52,	$R_2 = 141.$		
» Q_3	…	5,	26;	$R_3 = 104.$			
» Q_4	…	5	$R_4 = 36.$				

Transformée : $5x^4 + 36x^4 + 104x^2 + 141x + 81 = 0.$

136. Problème. — *Faire disparaître le deuxième terme d'une équation*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0. \qquad (1)$$

On suppose $A_1 \neq 0$, et la nouvelle équation doit être de la forme

$$B_0 y^m + B_2 y^{m-2} + B_3 y^{m-3} + \dots + B_m = 0. \qquad (2)$$

La somme des racines de l'équation (2) étant nulle, il suffit de diminuer chacune des racines de (1) du m^e de leur somme ou de poser

$$y = x + \frac{A_1}{mA_0} = x + \frac{p}{q} = \frac{qx + p}{q}, \qquad (3)$$

$\frac{p}{q}$ désignant la fraction irréductible égale à $\frac{A_1}{mA_0}$. La transformation (3) peut se décomposer en d'autres plus simples :

$$x' = qx, \quad x'' = x' + p, \quad y = \frac{x''}{q}.$$

On obtient l'équation en x' en multipliant par q les racines de (1); on diminue ensuite de $-p$ les racines de la nouvelle équation; enfin, on divise par q les racines de la dernière équation. Mais les deux premières transformations suffisent.

Exemple. — $3x^4 - 8x^3 - 6x + 4 = 0.$

On diminue les racines du quart de leur somme, ce qui revient à poser

$$y = x - \frac{2}{3} = \frac{3x-2}{3}.$$

Il est même plus avantageux de poser $y = 3x - 2$, ou d'effectuer les transformations

$$x' = 3x, \quad y = x' - 2.$$

L'équation en x' est (**133**)

$$3x'^4 - 8.3x'^3 - 6.3^3x' + 4.3^4 = 0.$$

En la simplifiant par 3 et diminuant de 2 les racines, on trouve

$$y^4 - 24y^2 - 118y - 48 = 0.$$

137. Remarque. — On peut se proposer de faire disparaître un terme quelconque de l'équation $F(x) = 0$. Si l'on diminue de h les racines, on a la transformée (**135**)

$$F(h) + yF'(h) + \frac{y^2}{1.2}F''(h) + \ldots + \frac{y^m}{m!}F^{(m)}(h) = 0.$$

Pour faire disparaître le terme en y^p, on pose $F^{(p)}(h) = 0$, ce qui donne une équation de degré $m - p$ en h.

Le terme indépendant sera nul si $F(h) = 0$; h est alors une racine de l'équation proposée. Ce résultat s'explique facilement.

138. Problème. — *Former l'équation admettant pour racines les inverses des racines d'une équation donnée* $F(x) = 0$.

Il faut éliminer x entre les équations

$$y = \frac{1}{x}, \quad F(x) = 0.$$

La transformée est $F\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, ou en écrivant x pour y :

$$A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1} + A_m x^m = 0.$$

Remarque. — Si la transformée se confond avec l'équation proposée, celle-ci est dite *équation réciproque.* A toute racine α de $F(x) = 0$ correspond alors une autre racine égale à $\frac{1}{\alpha}$.

139. Transformation homographique. — Les transformations précédentes sont comprises dans la *transformation homographique :*

$$Axy + By + Cx + D = 0, \quad \text{ou} \quad y = -\frac{Cx + D}{Ax + B}. \qquad (1)$$

Par exemple, si $A = 0$, $D = 0$, on multiplie les racines de l'équation proposée par un nombre constant.

De la formule (1), on tire

$$x = -\frac{By + D}{Ay + C},$$

de sorte que la transformée de $F(x) = 0$ est

$$F\left(-\frac{By + D}{Ay + C}\right) = 0.$$

On peut présenter autrement le calcul de cette transformée. Rendons l'équation proposée homogène en remplaçant x par $\frac{x}{x'}$:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} x' + \dots + A_{m-1} x x'^{m-1} + A_m x'^m = 0,$$

et désignons par $\frac{y}{y'}$ la racine de la transformée ; la transformation homographique correspond à la substitution

$$x = ay + by', \quad x' = a'y + b'y'.$$

Limites des racines.

140. Définitions. — On dit qu'un nombre positif L est une *limite supérieure* des racines positives de l'équation à coefficients réels $F(x) = 0$, si L est supérieur à la plus grande racine positive de cette équation. Supposons le premier terme de $F(x)$ positif; alors si l'on a $F(x) > 0$ pour $x \geq L$, L est une limite supérieure, car il n'y aura pas de racine supérieure à L.

On appelle *limite inférieure* des racines positives de l'équation $F(x) = 0$, tout nombre l inférieur à la plus petite racine positive. Pour obtenir une telle limite, on peut chercher une limite supérieure L_1 des racines positives de l'équation $F\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et poser $l=\frac{1}{L_1}$.

Pour trouver deux nombres $-L'$ et $-l'$ entre lesquels sont comprises les racines négatives de l'équation $F(x) = 0$, on cherche une limite supérieure L' et une limite inférieure l' des racines positives de la transformée $F(-x) = 0$.

Lorsqu'un polynome à coefficients réels est ordonné suivant les exposants décroissants de x, on appelle *variation* la succession de deux termes de signes contraires; la variation est *descendante* ou *ascendante* suivant que le terme positif précède ou suit le terme négatif. La succession de deux termes de même signe a reçu le nom de *permanence*. Ainsi, le polynome

$$3x^6 + 2x^5 + 8x^3 - 9x^2 - 20x + 4$$

présente successivement deux permanences, une variation descendante, une permanence, une variation ascendante.

141. Méthode de Lagrange. — *Quand le premier coefficient d'une équation est l'unité, une limite supérieure des racines est*

$$L = 1 + \sqrt[p]{N},$$

N désignant la plus grande des valeurs absolues des coefficients négatifs, et p la différence entre le degré de l'équation et celui du premier terme négatif.

Soit l'équation

$$F(x) \equiv x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0.$$

Si le premier terme négatif est celui en x^{m-p} et si N est la plus grande valeur absolue des coefficients négatifs, on a pour toute valeur positive de x :

$$F(x) > x^m - N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \dots + 1); \qquad (1)$$

car on a augmenté la somme des termes négatifs, remplacé les termes positifs à partir de x^{m-p} par des termes négatifs et négligé les termes positifs compris entre x^m et x^{m-p}. L'inégalité (1) donne, si $x > 1$:

$$F(x) > x^m - N\frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1} > \frac{x^m(x-1) - Nx^{m-p+1}}{x - 1}.$$

Pour avoir $F(x) > 0$, il suffit que x vérifie la relation

$$x^m(x-1) - Nx^{m-p+1} > 0,$$

ou, en divisant par x^{m-p+1},

$$x^{p-1}(x-1) - N > 0,$$

et en remplaçant x^{p-1} par la quantité plus petite $(x-1)^{p-1}$,

$$(x-1)^p - N \geqq 0,$$

ce qui revient à

$$x \geqq 1 + \sqrt[p]{N}.$$

Remarques. — I. Mac-Laurin avait indiqué la limite

$$L = 1 + N;$$

on l'obtient en observant que pour toute valeur positive de x,

$$F(x) > x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1),$$

ce qui est l'inégalité (1) où l'on remplace p par 1.

II. La limite $1 + \sqrt[p]{N}$ est aussi une limite supérieure des racines de l'équation dérivée $F'(x) = 0$. Car si l'on applique la méthode de Lagrange à l'équation $\frac{1}{m} F'(x) = 0$, le nombre p ne change pas, et les coefficients sont plus petits que les coefficients correspondants de $F(x)$; on obtient donc une limite plus petite que $1 + \sqrt[p]{N}$.

142. Méthode par groupement des termes. — *On obtient une limite supérieure des racines en décomposant le premier membre de l'équation en plusieurs polynomes présentant cha-*

cun au plus une variation (descendante) *et en cherchant un nombre qui rende tous ces polynomes positifs ou nuls.*

Cette méthode repose sur la proposition suivante :

Si un polynome f(x), *présentant une seule variation* (descendante), *est positif pour une valeur positive de* x, *il reste positif à partir de cette valeur.*

Soit le polynome ordonné

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Gx^n - (Hx^p + Ix^{p-1} + \dots + Mx^q).$$

On peut écrire

$$\frac{f(x)}{x^n} = Ax^{m-n} + \dots + G - \left(\frac{H}{x^{n-p}} + \dots + \frac{M}{x^{n-q}}\right).$$

Posons

$$f_1(x) = Ax^{m-n} + \dots + G, \quad f_2(x) = \frac{H}{x^{n-p}} + \dots + \frac{M}{x^{n-q}},$$

de sorte que $f(x) = x^n[f_1(x) - f_2(x)]$.

Si l'on fait croître x de 0 à ∞, $f_1(x)$ croît constamment et $f_2(x)$ décroît; donc la différence $f_1(x) - f_2(x)$ croît toujours. Or, cette différence commence par une valeur négative et finit par une valeur positive; elle passe donc par zéro pour une certaine valeur $x = a$, et reste positive pour toute valeur de x supérieure à a. La proposition est donc démontrée.

Cela posé, soit à chercher une limite supérieure des racines de

$$x^5 + x^4 - x^3 + x - 10000 = 0.$$

En groupant ainsi :

$$(x^5 + x^4 - x^3) + (x - 10000),$$

et observant que le premier groupe est positif pour $x \geq 1$, et le second pour $x > 10000$, on voit que 10000 est une limite des racines. Mais en écrivant

$$(x^5 - 10000) + (x^4 - x^3) + x,$$

on obtient la limite $\sqrt[5]{10000}$.

La méthode de Lagrange donne $1 + \sqrt{10000}$ ou 101.

Remarque. — On peut aussi employer des groupes ayant plus d'une variation, ainsi que nous allons le montrer sur l'équation

$$x^4 - 5x^3 + 17x^2 - 23x + 1 = 0.$$

Décomposons $17x^2$ en $10x^2 + 7x^2$ et groupons ainsi :

$$x^2(x^2 - 5x + 7) + x(10x - 23) + 1.$$

Le trinome $x^2 - 5x + 7$ dont les racines sont imaginaires, est constamment positif ; le binome $10x - 23$ est positif à partir de $x = 2,3$; une limite supérieure est donc 2, 3.

La méthode de Lagrange donne $L = 24$.

143. Méthode de Newton. — *On obtient une limite supérieure des racines de l'équation* $F(x) = 0$ *en cherchant un nombre qui rende positives la fonction* $F(x)$ *et ses dérivées.*

En effet,

$$F(a + h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \dots ;$$

donc, si les nombres $F(a)$, $F'(a)$, $F''(a)$, ... sont positifs ainsi que h, on a aussi $F(a + h) > 0$, et aucun nombre supérieur à a ne peut être racine. On aurait la même conclusion si a annulait quelques dérivées de $F(x)$ et rendait positives les autres.

Voici comment on applique la méthode. La dernière dérivée, égale à $m!\, A_0$, est positive. On cherche une valeur a_1 de x rendant nulle ou positive la dérivée $F^{(m-1)}(x)$ qui est du premier degré. On examine ensuite si cette valeur rend nulle ou positive la dérivée $F^{(m-2)}(x)$; si $F^{(m-2)}(a_1) < 0$, on cherche une valeur a_2 supérieure à a_1 rendant la dérivé $F^{(m-2)}(x)$ positive ou nulle. On substitue a_2 dans $F^{(m-3)}(x)$; si le résultat est négatif, on remplace x par un nombre plus grand jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat $F^{(m-3)}(a_3) > 0$. On continue ainsi jusqu'à la fonction $F(x)$ elle-même. Le dernier nombre substitué est une limite supérieure des racines de $F(x)$.

Dans les essais, il est inutile de revenir sur les polynomes déjà examinés ; car si un nombre b rend positives ou nulles la dérivée d'ordre $m - p$ et celles d'ordre plus élevé, pour tout nombre supérieur à b on a $F^{(m-p)}(x) > 0$.

Pour les nombres a_1, a_2, ... on prend ordinairement des nombres entiers.

Exemple. —

$$F(x) = x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 52x - 13,$$
$$F'(x) = 5x^4 + 28x^3 - 36x^2 - 116x + 52,$$
$$\frac{F''(x)}{1.2} = 10x^3 + 42x^2 - 36x - 58,$$
$$\frac{F'''(x)}{1.2.3} = 10x^2 + 28x - 12,$$
$$\frac{F^{IV}(x)}{1.2.3.4} = 5x + 7.$$

Or,

$$F^{IV}(0) > 0;$$
$$F'''(0) < 0, \quad F'''(1) > 0;$$
$$F''(1) < 0, \quad F''(2) > 0;$$
$$F'(2) < 0, \quad F'''(3) > 0;$$
$$F(3) > 0.$$

Donc 3 est une limite supérieure des racines de $F(x)$.

Remarque. — Appelons, pour un moment, *limite supérieure* des racines d'une équation $F(x) = 0$ un nombre L tel que l'équation n'ait pas de racine plus grande que L, et limite inférieure un nombre L′ tel, que l'équation n'ait pas de racine plus petite que L′.

La règle de Newton pourra être énoncée et complétée ainsi :

Tout nombre qui substitue à x *dans la suite*

$$F(x), \quad F'(x), \quad F''(x), \quad \ldots \quad F^{(m-1)}(x), \quad F^{(m)}(x),$$

donne des résultats de même signe, est une limite supérieure des racines de F(x) *; si les résultats sont alternativement positifs et négatifs, le nombre substitué est une limite inférieure.*

En effet, si les nombres.

$$F(a), \quad F'(a), \quad \ldots \quad F^{(m-1)}(a), \quad F^{(m)}(a)$$

sont positifs, on a $F(a+h) > 0$ pour toute valeur positive de h, et l'équation n'a pas de racine plus grande que a. Si ces nombres sont alternativement positifs et négatifs (ou négatifs et positifs), $F(a-h)$ a le signe de $F(a)$ pour toute valeur positive de h, et l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racine plus petite que a.

144. Méthode de Thibault. — *Un nombre* a *est limite supérieure des racines de l'équation* F(x) = 0, *si les coefficients et le reste de la division de* F(x) *par* x — a *sont positifs.*

Soient $B_0, B_1, \ldots B_{m-1}, B_m$ ces coefficients et ce reste, de sorte que

$$F(x) \equiv (x-a)(B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots + B_{m-1}) + B_m.$$

S'ils sont positifs, on a $F(x) > 0$ pour toute valeur de x supérieure à a.

Remarque. — On connaît le procédé rapide pour calculer les nombres B (117); ce sont les valeurs des fonctions

$$\begin{aligned} F_0 &= A_0, \\ F_1 &= A_0 x + A_1, \\ F_2 &= A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m, \end{aligned}$$

pour $x = a$.

Tout nombre a qui rend positives les fonctions F_0, F_1, ... $F_p (p < m)$, est une limite supérieure des racines de l'équation $F_p = 0$; car $F_0, F_1, \ldots F_p$ sont aussi les fonctions de Laguerre de F_p.

145. Règle de Bret. — *On obtient une limite supérieure des racines d'une équation algébrique* $F(x) = 0$ *en divisant chaque coefficient négatif, pris positivement, par la somme des coefficients positifs qui le précèdent, et en ajoutant l'unité à la plus grande des fractions ainsi obtenues.*

Soit, pour fixer les idées, l'équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + \ldots - A_p x^{m-p} + \ldots \pm A_m = 0, \quad (1)$$

les signes des termes étant mis en évidence. Transformons chaque terme positif au moyen de la formule

$$x^n = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) + 1;$$

en écrivant y au lieu de $x - 1$, nous obtenons

$$F(x) = A_0 y x^{m-1} \begin{array}{r|r|r|l} + A_0 y & x^{m-2} + A_0 y & x^{m-3} + A_0 y & x^{m-4} + \ldots \\ + A_1 y & + A_1 y & + A_1 y & + \ldots \\ & + A_2 y & + A_2 y & \\ & - A_3 & & \end{array}$$

Si nous supposons $x > 1$, toutes les colonnes où il n'y a pas de terme négatif seront positives. Le terme en x^{m-3} sera positif si

$$y(A_0 + A_1 + A_2) - A_3 > 0 \quad \text{ou} \quad x > \frac{A_3}{A_0 + A_1 + A_2} + 1;$$

celui en x^{m-p-1} l'est pour

$$x > \frac{A_p}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots} + 1,$$

le dénominateur étant égal à la somme des coefficients positifs qui précèdent A_p dans l'équation (1). On a donc $F(x) > 0$ pour toutes les valeurs de x supérieures à la plus grande des quantités de la forme

$$\frac{A_p}{A_0 + A_1 + A_2 + \dots} + 1.$$

Exercices et notes.

1. Transformer l'équation

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{2}{9} = 0$$

en une autre à coefficients entiers.

2. Ramener à la forme $x^3 + px + q = 0$ les équations

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0, \quad 2x^3 - 7x^2 + 10 = 0.$$

3. Ramener l'équation

$$2x^5 - 25x^4 + 120x^3 - 16x^2 - 10x - 16 = 0$$

à une autre privée du troisième terme.

4. Trouver la condition nécessaire pour qu'on puisse faire disparaître les termes du 3e et du 2e degré de l'équation

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0$$

en diminuant toutes les racines d'une même quantité.

5. Etant donnée l'équation

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$

trouver : 1° l'équation aux carrés des racines ; 2° l'équation aux racines carrées des racines.

6. Trouver des limites supérieures des racines des équations suivantes :

$$x^4 - 5x^3 - 37x^2 + 3x + 39 = 0,$$
$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 700x + 800 = 0,$$
$$x^8 + x^7 + x^6 + 10x^5 - 100x^4 + 1 = 0,$$
$$x^7 + 8x^6 + 2x^5 - 10x^4 - 40x^3 + 10x^2 - 14x - 100 = 0.$$

7. Etant donnée l'équation de degré pair

$$A_0x^m - A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - \dots - A_{m-1}x + A_m = 0,$$

où $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ sont des nombres positifs ; soient H le plus grand des rapports

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \quad \dots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

et h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1},\quad \frac{A_4}{A_3},\quad \frac{A_6}{A_5},\quad \ldots,\quad \frac{A_m}{A_{m-1}}.$$

L'équation aura toutes ses racines comprises entre H et h si $H > h$, et toutes ses racines imaginaires si $H = h$ ou $< h$.

8. Soient m un nombre impair, et l'équation

$$A_0x^m - A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - \ldots A_m = 0,$$

où A_0, A_1, A_2, ... sont des nombres positifs.

Soient H le plus grand et H' le plus petit des rapports

$$\frac{A_1}{A_0},\quad \frac{A_3}{A_2},\quad \frac{A_5}{A_4},\quad \ldots,\quad \frac{A_m}{A_{m-1}}.$$

Soient h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1},\quad \frac{A_4}{A_3},\quad \ldots,\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}.$$

L'équation n'a aucune racine supérieure à H ou inférieure à H', et elle ne peut en avoir qu'une seule inférieure à $\frac{h}{2}\cdot$ Si $H = \frac{h}{2}$ ou $< \frac{h}{2}$, elle n'aura qu'une racine réelle.

9. Soit l'équation

$$F(x) = A_0x^m + \ldots + A_{p-1}x^{m-p+1} - A_px^{m-p} \ldots = 0,$$

les coefficients A_0, A_1, ..., A_{p-1} étant positifs. Si N désigne la plus grande des valeurs absolues des coefficients négatifs, une limite supérieure des racines est

$$L = 1 + \frac{N}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}}.$$

Il suffit d'observer que, pour $x > 1$,

$$F(x) > (A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1})x^{m-p+1} - A_px^{m-p} \ldots,$$

et d'appliquer la règle de Mac-Laurin à la dernière fonction.

10. Soit l'équation

$$x^m \ldots - Px^{m-p} \ldots - Qx^{m-q} \ldots - Rx^{m-r} \ldots = 0.$$

Si n est le nombre des termes négatifs, une limite supérieure des racines positives est le plus grand des nombres $\sqrt[p]{nP}$, $\sqrt[q]{nQ}$, $\sqrt[r]{nR}$, ... (**95**)

On obtient aussi une limite supérieure en ajoutant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{P}$, $\sqrt[q]{Q}$, $\sqrt[r]{R}$, ...

11. Soit L une limite supérieure des modules des racines de l'équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0;$$

on a

$$L + 1 > \sqrt[m]{1 + \left|\frac{A_1}{A_0}\right| + \left|\frac{A_2}{A_0}\right| + \dots + \left|\frac{A_m}{A_0}\right|}.$$

CHAPITRE VII.

THÉORÈME DE DESCARTES.

—

Règle des signes de Descartes.

146. Lemme de Segner. — *Soit* F(x) *un polynome à coefficients réels, ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *et soit* a *un nombre positif quelconque : le produit* F(x) (x — a) *contient un nombre impair de variations de plus que* F(x).

Pour mettre les variations de $F(x)$ en évidence, nous représentons ce polynome par

$$A_m x^m + \dots + A_{n+1} x^{n+1} - A_n x^n \dots - A_{p+1} x^{p+1} + A_p x^p \dots$$
$$+ A_{t+1} x^{t+1} - A_t x^t \dots - A_s x^s.$$

Le premier terme $A_m x^m$ est positif; — $A_n x^n$ est le premier terme négatif; $A_p x^p$ est le premier terme positif qui suit — $A_n x^n$; et ainsi de suite. $F(x)$ se termine par un groupe de termes que nous supposons négatifs; le premier terme de ce groupe est — $A_t x^t$.

A_m, A_n, A_p, ..., A_t, A_s désignent des nombres positifs; A_{n+1}, A_{p+1}, ..., A_{t+1}, A_{s+1} représentent des nombres positifs ou nuls.

Effectuant le produit $F(x)\,(x - a)$ on trouve

$$\begin{array}{rl|rl|rl|l} A_m x^{m+1} \dots & -A_n & x^{n+1} \dots & + A_p & x^{p+1} \dots & - A_t & x^{t+1} \dots \\ & -aA_{n+1} & & + aA_{p+1} & & - aA_{t+1} & + aA_s x^s. \end{array}$$

$F(x)$ contient une seule variation entre les termes $A_m x^m$ et $A_n x^n$; la partie correspondante du produit $F(x)(x-a)$ en contient au moins une, car elle commence par le terme positif $A_m x^{m+1}$ et se termine par le terme négatif $-(A_n + aA_{n+1})x^{n+1}$. De même $F(x)$ a une seule variation entre les termes en x^n et x^p, tandis que $F(x)(x-a)$ en a au moins une dans la partie allant de x^{n+1} à x^{p+1}. En continuant ainsi jusqu'au terme $-A_t x^t$, on trouve au moins autant de variations dans le produit $F(x)(x-a)$ que dans le multiplicande. Mais à partir de x^t, $F(x)$ ne présente plus de variation, tandis que le produit en a au moins une entre x^{t+1} et x^s; cette conclusion subsiste aussi dans le cas où le dernier groupe de $F(x)$ est remplacé par un seul terme $-A_t x^t$.

Il résulte de là que le produit $F(x)(x-a)$ a au moins une variation de plus que $F(x)$.

Le premier et le dernier terme de $F(x)$ étant de signes contraires, $F(x)$ a un nombre impair de variations; ceux de $F(x)(x-a)$ étant de même signe, ce produit a un nombre pair de variations. Donc le second polynome présente un nombre impair de variations de plus que le premier.

Les raisonnements et les conclusions sont les mêmes lorsque le dernier groupe de $F(x)$ est composé de termes positifs.

147. Règle des signes de Descartes. — *Le nombre des racines positives d'une équation algébrique à coefficients réels ne surpasse pas le nombre des variations de son premier membre; quand il est moindre, la différence est paire.*

Soient $a_1, a_2, \dots a_p$ toutes les racines positives, distinctes ou non, de l'équation $F(x) = 0$; on peut écrire

$$F(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_p)f(x),$$

$f(x)$ étant une constante ou une fonction entière qui n'admet pas de racine positive. Dans le premier cas, la proposition se vérifie immédiatement, le développement du produit $(x-a_1)\dots(x-a_p)$ ayant p variations. Dans le second cas, $f(x)$ dont le premier terme peut être supposé positif se termine par un terme positif; sans quoi l'équation $f(x) = 0$ aurait au moins une racine positive (127). Le nombre des variations de $f(x)$ est donc nul ou pair; désignons-le par $2k$. Si on multiplie $f(x)$ par $x - a_1$, le nombre des variations augmente d'un nombre impair $2k_1 + 1$; si on multiplie le résultat par $x - a_2$, le nombre des variations

augmente de nouveau d'un nombre impair $2k_2 + 1$; et ainsi de suite. Donc le nombre des variations de $F(x)$ est

$$r = 2k + (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_p + 1)$$
$$= 2(k + k_1 + \dots + k_p) + p.$$

Les nombres k, k_1, ... k_p étant positifs ou nuls, on a

$$p \leq r, \quad r - p = 2h,$$

h étant positif ou nul.

148. Corollaire I. — *Le nombre des racines négatives d'une équation ne surpasse pas le nombre des variations de la transformée en* $(-x)$; *s'il est moindre, la différence est paire.*

Car les racines négatives de $F(x) = 0$ correspondent aux racines positives de la transformée $F(-x) = 0$ (**132**), et inversement.

149. Corollaire II. — *Quand une équation a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre de ses variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des variations de la transformée en* $(-x)$.

Soient :

m le degré de l'équation $F(x) = 0$;
p le nombre des racines positives ;
n » » négatives ;
v » des variations de $F(x)$;
v' » » de $F(-x)$.

Observons d'abord que la somme $v + v'$ ne surpasse pas le degré de l'équation. En effet, si le polynome $F(x)$ est complet, il renferme $m + 1$ termes ; par suite, le nombre des variations et celui des permanences de $F(x)$ ont pour somme m. Mais le changement de x en $-x$ transforme les variations en permanences et réciproquement; car deux termes consécutifs renfermant des exposants de parités différentes, un seul change de signe. Ainsi, dans le cas d'une équation complète, $v + v' = m$. D'un autre côté, si l'on supprime quelques termes de $F(x)$, les nombres v, v' pourront bien diminuer, mais il n'augmenteront pas. Donc

$$v + v' \leq m. \tag{1}$$

En vertu du théorème de Descartes,

$$p \leq v, \quad n \leq v', \quad \text{d'où} \quad p + n \leq v + v', \tag{2}$$

et à cause de (1),

$$p + n \leq m. \tag{3}$$

Comme toutes les racines sont réelles, on a

$$p + n = m,$$

ce qui exclut le signe < des relations précédentes ; donc

$$p = v, \quad n = v', \quad v + v' = m.$$

150. Corollaire III. — *Toute équation qui ne présente qu'une variation, a une racine positive et une seule.*

Cette proposition, qui a été démontrée directement ci-dessus (**142**), résulte aussi du théorème de Descartes. De plus, nous voyons maintenant que la racine positive est simple.

151. Exemples. — I. Soit l'équation

$$x^6 + 4x^5 - 9x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Comme elle présente trois variations, elle a trois racines positives ou une seule. Il est inutile de chercher la transformée en $-x$: l'équation étant complète, on a (**149**) $v + v' = m$; donc $v' = 3$ et les racines négatives sont au nombre de 3 ou 1.

II. Considérons encore l'équation *incomplète*

$$x^8 - 4x^5 - 6x^3 + 2x + 1 = 0.$$

On a $v = 2$, $v' = 2$, d'où

$$p \leq 2, \quad n \leq 2;$$

par suite l'équation a au moins quatre racines imaginaires.

Remarque. — Dans les équations incomplètes, la somme $v + v'$ est généralement inférieure au degré m de l'équation ; on en conclut l'existence d'au moins $m - (v + v')$ racines imaginaires.

Symptômes d'imaginarité.

152. Règle de Sturm. — *Si la multiplication de* $F(x)$ *par* $x - a$, a *étant positif, introduit* $2k + 1$ *variations, l'équation* $F(x) = 0$ *a au moins* $2k$ *racines imaginaires.*

Soient : v le nombre des variations de $F(x)$; v' celui de $F(-x)$; p le nombre des racines positives de $F(x)$; n celui des racines négatives ; enfin, m le degré de $F(x)$.

Posons $(x - a)\,F(x) = \varphi(x)$. L'équation $\varphi(x) = 0$ a $p + 1$ racines positives, n racines négatives, $v + 2k + 1$ variations; donc $\varphi(-x)$ a, au plus, $(m + 1) - (v + 2k + 1)$ variations : ainsi

$$n \leq m - (v + 2k), \quad p \leq v.$$

Il en résulte

$$n + p \leq m - 2k;$$

le nombre des racines imaginaires est donc au moins égal à $2k$.

Remarque. — Semblablement, *si la multiplication de* F(x) *par* x + a *fait perdre* 2k *variations* (*), *l'équation* F(x) = 0 *a, au moins,* 2k *racines imaginaires.*

En effet, l'équation $(x + a)F(x) = 0$ a p racines positives, $n + 1$ racines négatives, $v - 2k$ variations. On en conclut

$$p \leq v - 2k;$$

et comme $n \leq v'$,

$$p + n \leq v + v' - 2k.$$

D'ailleurs, $v + v' \leq m$; donc à plus forte raison

$$p + n \leq m - 2k.$$

Donc l'équation $F(x) = 0$ a au moins $2k$ racines imaginaires.

153. Théorème. — *Le nombre des racines imaginaires d'une équation incomplète est au moins égal à la somme des nombres de racines imaginaires de toutes les équations binomes qu'on obtient en égalant à zéro chaque groupe de deux termes consécutifs de l'équation proposée.*

Soit l'équation ordonnée suivant les exposants décroissants de x,

$$Ax^m + Bx^p + Cx^q + \ldots + Hx^r + Kx^s + L = 0. \qquad (1)$$

Désignons par v_1, v_2, .. v_h les nombres des variations des groupes

$$Ax^m + Bx^p, \quad Bx^p + Cx^q, \quad \ldots, \quad Kx^s + L, \qquad (2)$$

(*) Les nombres des variations de $F(x)$ et $(x+a)\,F(x)$ sont de même parité, parce que les derniers termes de ces polynomes ont le même signe.

par $v'_1, v'_2, \ldots, v'_h$ les nombres des variations de ces groupes quand on change x en $-x$; ces nombres sont égaux à 1 ou à 0. On a

$$v + v' = (v_1 + v_2 + \ldots + v_h) + (v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_h).$$

D'autre part, l'équation

$$Ax^m + Bx^p = 0$$

ayant p racines nulles, v_1 racines positives (*) et v'_1 racines négatives, a $m - p - (v_1 + v'_1)$ racines imaginaires; de même, les autres équations obtenues en égalant à zéro les binomes (2) ont respectivement

$$p - q - (v_2 + v'_2), \ldots, s - (v_h + v'_h)$$

racines imaginaires. Le nombre total de ces racines est donc

$$m - p - (v_1 + v'_1) + p - q - (v_2 + v'_2) + \ldots + s - (v_h + v'_h)$$
$$= m - (v_1 + v_2 + \ldots + v_h) - (v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_h) = m - (v + v').$$

Mais l'équation $F(x) = 0$, ayant au plus $v + v'$ racines réelles, a au moins $m - (v + v')$ racines imaginaires. Le théorème est donc démontré.

154. Théorème des lacunes. — *S'il manque un terme entre deux termes de même signe, ou s'il manque plus d'un terme entre deux termes de signes quelconques, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.*

Soit l'équation

$$Ax^m + \ldots + Gx^{n+2} + Hx^n + \ldots = 0,$$

G et H étant de même signe. L'équation $Gx^2 + H = 0$ ayant deux racines imaginaires, l'équation proposée en a au moins deux (**153**).

Soit encore l'équation

$$Ax^m + \ldots + Gx^{n+p} + Hx^n + \ldots = 0, \quad \text{où} \quad p > 2. \qquad (1)$$

Si $p = 2q + 1$, l'équation $Gx^p + H = 0$ a une seule racine réelle et, par suite, $2q$ racines imaginaires; donc l'équation (1) a au moins $2q$ racines imaginaires. Si $p = 2q$, on voit, de la

(*) Une seule racine positive si $v_1 = 1$, et pas de racine positive si $v_1 = 0$.

même manière, que l'équation (1) a, au moins, $2q$ ou $2q-2$ racines imaginaires, suivant que G et H sont de même signe ou de signes contraires.

155. Théorème de De Gua. — *Quand une équation a toutes ses racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque surpasse le produit des deux coefficients voisins.*

Considérons quatre termes consécutifs de l'équation $F(x)=0$:

$$A_p x^{m-p} + A_{p+1} x^{m-p-1} + A_{p+2} x^{m-p-2} + A_{p+3} x^{m-p-3}.$$

Trois termes consécutifs du produit $F(x)(x-a)$ sont

$$\begin{array}{r|r|r|l} A_{p+1} & x^{m-p} + A_{p+2} & x^{m-p-1} + A_{p+3} & x^{m-p-2}. \\ -aA_p & -aA_{p+1} & -aA_{p+2} & \end{array}$$

Si l'on choisit a de manière à faire disparaître le terme en x^{m-p-1}, les coefficients de x^{m-p} et de x^{m-p-2} seront

$$\frac{A^2_{p+1} - A_p A_{p+2}}{A_{p+1}}, \quad -\frac{A^2_{p+2} - A_{p+1} A_{p+3}}{A_{p+1}}.$$

Toutes les racines de $F(x)=0$ étant supposées réelles, les coefficients de x^{m-p} et de x^{m-p-2} doivent être de signes contraires si le terme intermédiaire manque (**154**); il en résulte que les binomes

$$A^2_{p+1} - A_p A_{p+2}, \quad A^2_{p+2} - A_{p+1} A_{p+3} \qquad (1)$$

et tous ceux de la même forme ont un signe commun. Or, les trois premiers termes du produit $F(x)(x-a)$ sont

$$\begin{array}{r|r|l} A_0 x^{m+1} + A_1 & x^m + A_2 & x^{m-1}; \\ -aA_0 & -aA_1 & \end{array}$$

si l'on fait disparaître le terme en x^m, les coefficients voisins seront

$$A_0, \quad -\frac{A_1^2 - A_0 A_2}{A_0};$$

comme ils sont de signes contraires (on suppose $A_0 > 0$), le binome $A_1^2 - A_0 A_2$ est positif, et il en est de même des binomes (1).

On conclut de là

$$A_1^2 > A_0 A_2, \quad A_2^2 > A_1 A_3, \quad \ldots, \quad A^2_{p+1} > A_p A_{p+2}, \ldots$$

Remarque. — La réciproque du théorème de De Gua n'est pas exacte : l'équation du second degré

$$A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0$$

a des racines imaginaires si $A_1^2 > A_0 A_2$ et $< 4A_0 A_2$.

156. Corollaires. — I. *Si le carré d'un coefficient est égal ou inférieur au produit des deux coefficients voisins, l'équation a des racines imaginaires.*

En particulier, *une équation a des racines imaginaires : 1° si trois coefficients consécutifs sont en progression par quotient ; 2° si deux coefficients égaux sont séparés par un coefficient ayant une valeur absolue égale ou inférieure.*

II. *Si quatre coefficients consécutifs* A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, A_{p+3} *vérifient la relation*

$$(A_{p+1}A_{p+2} - A_p A_{p+3})^2 - 4(A_{p+1}^2 - A_p A_{p+2})(A_{p+2}^2 - A_{p+1}A_{p+3}) \geq 0.$$

l'équation a des racines imaginaires.

Appliquons le corollaire précédent à l'équation $F(x)(x - a) = 0$, a désignant un nombre réel. Trois coefficients consécutifs étant

$$A_{p+1} - aA_p, \quad A_{p+2} - aA_{p+1}, \quad A_{p+3} - aA_{p+2},$$

l'équation a des racines imaginaires si le carré du coefficient moyen est égal au produit des deux autres, c'est-à-dire si l'équation

$$(A_{p+2} - aA_{p+1})^2 - (A_{p-1} - aA_p)(A_{p+3} - aA_{p+2}) = 0. \qquad (1)$$

est vérifiée par une valeur réelle de a. En exprimant cette condition on trouve le critérium énoncé ci-dessus.

La valeur de a peut être 1 ; on a alors

$$(A_{p+2} - A_{p+1})^2 = (A_{p+1} - A_p)(A_{p+3} - A_{p+2}). \qquad (2)$$

La relation (2) est vérifiée si

$$A_{p+2} - A_{p+1} = A_{p+1} - A_p = A_{p+3} - A_{p+2} ;$$

donc, *une équation a des racines imaginaires si quatre coefficients consécutifs sont en progression arithmétique.*

Exercices et notes.

1. Soient $x_1, x_2, \dots x_m$ des nombres réels quelconques, et S_p la somme de leurs produits p à p. Démontrer que

$$S_1^2 > S_2, \quad S_2^2 > S_1 S_3, \quad S_3^2 > S_2 S_4, \quad \dots, \quad S_{m-1}^2 > S_{m-2} S_m.$$

Conséquence du théorème de De Gua.

2. Le nombre des racines de $F(x) = 0$ qui sont supérieures à un nombre donné a, ne peut surpasser le nombre des variations de la suite

$$F(a), \quad F'(a), \quad F''(a), \quad \ldots, \quad F^{(m)}(a),$$

m étant le degré de $F(x)$; quand il est moindre, la différence est paire.

Appliquer le théorème de Descartes à l'équation $F(a + y) = 0$.

3. Si toutes les racines de $F(x) = 0$ sont réelles, le nombre des racines comprises entre a et b est égal à l'excès du nombre des variations de la suite

$$F(a), \quad F'(a), \quad F''(a), \quad \ldots, \quad F^{(m)}(a)$$

sur celui des variations de la suite

$$F(b), \quad F'(b), \quad F''(b), \quad \ldots, \quad F^{(m)}(b).$$

Appliquer la proposition (**149**) aux équations $F(a + y) = 0$, $F(b + y) = 0$.

4. Le nombre des racines de $F(x) = 0$ qui sont comprises entre a et b, est au plus égal au nombre des variations de l'équation $F\left(\frac{by + a}{y + 1}\right) = 0$ ordonnée par rapport à y.

On cherche la transformée qui correspond à $y = \frac{x - a}{b - x}$, et l'on applique le théorème de Descartes.

5. Si $\varphi(x)$ est une fonction entière au plus de degré $m - 3$, ou une fonction entière de degré $m - 2$ et commençant par un terme positif, l'équation $(x - a)^m + \varphi(x) = 0$ a des racines imaginaires.

6. Pour obtenir un symptôme d'imaginarité, on exprime que deux termes consécutifs du produit $F(x)(x^2 + px + q)$ disparaissent et que les valeurs correspondantes de p, q vérifient la relation $p^2 - 4q \geq 0$. On retrouve ainsi le théorème (**156**, 2°).

Si le multiplicateur est $x^2 - 1$, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - x - 1$, on voit que l'équation $F(x) = 0$ a des racines imaginaires quand quatre coefficients consécutifs sont

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \alpha, & \beta; \\ -(2\alpha + \beta), & \alpha, & \beta, & -(\alpha + 2\beta); \\ \beta - \alpha, & \alpha, & \beta, & \beta + \alpha. \end{array}$$

7. Si cinq coefficients consécutifs A, B, C, D, E sont tels, que

$$BD > 0, \quad (BC - AD)(CD - BE) > 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Le produit $F(x)(x^2 - \gamma^2)$ présente alors une lacune favorable.

8. Soient : $F(x) = 0$ une équation algébrique de degré m, a un nombre positif quelconque, et

$$\frac{F(x)}{x - a} = B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots + B_{m-1} + \frac{B_m}{x - a}. \qquad (1)$$

Le nombre des racines de $F(x)=0$ qui sont plus grandes que a, est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$B_0,\quad B_1,\quad B_2,\quad \ldots,\quad B_{m-1},\quad B_m; \qquad (2)$$

quand il est moindre, la différence est paire.

Cette proposition peut être démontrée comme le théorème de Descartes. Le produit du second membre de (1) par $(x-b)$ est

$$\begin{array}{r|r|r|l} B_0x^m + B_1 & x^{m-1} + B_{m-1} & x + B_m & -(b-a)\dfrac{B_m}{x-a} \\ -bB_0 & -bB_{m-2} & -bB_{m-1} & \end{array}$$

ou $C_0x^m + C_1x^{m-1} + \ldots + C_m + \dfrac{C_{m+1}}{x-a}\cdot$ La suite

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots,\ C_m,\ C_{m+1}$$

présente un nombre impair de variations de plus que la suite (2).

9. Si toutes les racines de l'équation $F(x)=0$ sont réelles, l'équation

$$[F^{(p)}(x)]^2 - \frac{p}{p+1}F^{(p-1)}(x)F^{(p+1)}(x) = 0$$

n'a que des racines imaginaires.

En effet, toutes les racines de $F(a+y)=0$ étant réelles, il n'existe pas de valeur réelle de a telle, que le carré de l'un des coefficients de cette équation soit égal au carré du produit des coefficients voisins.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES.

Conditions auxquelles satisfait une racine entière.

157. Théorème. — *Pour qu'un nombre entier soit racine d'une équation à coefficients entiers, il faut et il suffit : qu'il divise le dernier terme ; qu'il divise le quotient de cette division augmenté du coefficient de* x*; qu'il divise le quotient de la seconde division augmenté du coefficient de* x^2*, et ainsi de suite ;*

enfin, que le quotient de la m^e *division augmenté du coefficient de* x^m *donne pour somme zéro.*

Si le nombre entier a est racine de l'équation à coefficients entiers

$$F(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0, \qquad (1)$$

le quotient de la division de $F(x)$ par $x - a$ est un polynome à *coefficients entiers,* que nous représentons par

$$f(x) \equiv B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots + B_{m-2} x + B_{m-1}.$$

En identifiant $F(x)$ avec le produit $(x - a) f(x)$ on obtient

$$B_0 = A_0, \quad B_1 - B_0 a = A_1, \quad B_2 - B_1 a = A_2,$$
$$\ldots B_{m-1} - B_{m-2} a = A_{m-1}, \quad - B_{m-1} a = A_n.$$

Tirons de là les valeurs de $- B_{m-1}$, $- B_{m-2}$, ... en remontant la suite de ces égalités ; il vient

$$- B_{m-1} = \frac{A_m}{a}, \quad - B_{m-2} = \frac{- B_{m-1} + A_{m-1}}{a},$$
$$- B_{m-3} = \frac{- B_{m-2} + A_{m-2}}{a}, \quad \ldots, \quad - B_0 = \frac{- B_1 + A_1}{a}.$$

De plus, $- B_0 + A_0 = 0$. Ces relations démontrent le théorème.

Recherche des racines entières.

158. Pour déterminer les racines entières de $F(x) = 0$, on cherche une limite supérieure L des racines positives, et une limite supérieure L' des racines positives de la transformée en $- x$; puis on forme tous les diviseurs du dernier terme de $F(x)$, compris entre $-$ L' et L. On rejette ceux de ces diviseurs qui ne satisfont pas à toutes les conditions indiquées ci-dessus. L'exemple suivant montre suffisamment la marche à suivre.

Application. — Résoudre l'équation

$$4x^4 - x^3 - 56x^2 + 57x + 36 = 0. \qquad (1)$$

En écrivant

$$x^2(4x^2 - x - 56) + (57x + 36) = 0.$$

on peut observer que le trinome $4x^2 - x - 56$ reste positif à partir de sa plus grande racine qui est $\frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{897}\right)$, ce qui conduit à poser $L = 4$. La règle de Lagrange, appliquée à la transformée en $-x$, donne $L' = 5$.

Les diviseurs de 36 compris entre -5 et 4 sont

$$-4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2, \quad 3.$$

On voit facilement que 1 et -1 sont à exclure. Pour essayer les autres diviseurs, nous adoptons la disposition suivante :

(*a*)	4	— 1	— 56	57	36	
(*b*)	0	— 4	— 11	23	12	3
			»	9	4	3
				»	6	2
				»	— 6	— 2
				»	— 4	— 3
(*c*)		0	4	— 5	— 3	— 4

On écrit sur la première ligne les coefficients de l'équation. Pour *essayer* le diviseur 3, on divise 36 par 3 et l'on écrit le quotient 12 sous le nombre 36 ; on ajoute ce quotient au nombre placé à gauche dans la première ligne, on divise la somme par 3 et l'on écrit le quotient sous le nombre 57 ; et ainsi de suite. Comme on obtient ainsi des nombres entiers et finalement zéro, 3 est racine et les coefficients du quotient du premier membre de l'équation divisé par $x - 3$ sont les nombres (*b*) changés de signe. Les essais suivants se feront maintenant avec les nombres (*b*). Il faut d'abord examiner si 3 n'est pas racine multiple ; la troisième division donnant un quotient fractionnaire, on passe à un autre diviseur. Une seconde racine est -4 ; les nombres correspondants (*c*) sont les coefficients du quotient du polynome (1) divisé par $(x - 3)(x + 4)$. L'équation proposée est donc

$$(x - 3)(x + 4)(4x^2 - 5x - 3) = 0 ;$$

elle a deux racines incommensurables, égales à $\frac{1}{8}\left(5 \pm \sqrt{73}\right)$.

159. Règle d'exclusion. — On réduit quelquefois le nombre des essais à faire, en s'appuyant sur le principe suivant :

Si a *est racine entière d'une équation* F(x) = 0, *à coefficients entiers*, a — 1 *divise* F(1) *et* a + 1 *divise* F(— 1).

En effet, si a est racine, on a

$$F(x) = (x - a)f(x),$$

$f(x)$ étant un polynome à coefficients entiers ; par suite,

$$F(1) = (1 - a)f(1), \quad F(-1) = -(1 + a)f(-1),$$

en sorte que $F(1)$ est divisible par $1 - a$, et $F(-1)$ par $1 + a$.

On calculera donc $F(1)$ et $F(-1)$, et l'on exclura les diviseurs du dernier terme de $F(x)$ qui, diminués de 1, ne divisent pas $F(1)$, ou qui, augmentés de 1, ne divisent pas $F(-1)$.

Exemple. — $F(x) = x^3 - 44x^2 - 45x + 12600 = 0.$

On trouvera $L = 45$, $L' = 17$. Les diviseurs de 12600 compris entre -17 et 45 sont

± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ± 6, ± 7, ± 8, ± 9, ± 10, ± 12, ± 14, ± 15, 18, 20, 21, 24, 25, 28, 30, 35, 36, 40, 42.

La substitution de $+1$ et de -1 dans $F(x)$ donne

$$F(+1) = 12512 = 2^5.17.23, \quad F(-1) = 12600 = 2^3.3^2.5^2.7.$$

La règle d'exclusion écarte les diviseurs autres que

$$2, 3, 5, 9, 24, 35, -3, -7, -15.$$

En appliquant à ceux-ci la méthode du § 158, on trouve

$$x^3 - 44x^2 - 45x + 12600 = (x - 24)(x - 35)(x + 15).$$

Recherche des racines fractionnaires.

160. Théorème. — *Si la fraction irréductible* $\frac{a}{b}$ *est racine de l'équation à coefficients entiers*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

le numérateur a *divise* A_m, *le dénominateur* b *divise* A_0.

Remplaçons x par $\frac{a}{b}$ et chassons ensuite les dénominateurs ; il vient

$$A_0a^m + A_1x^{m-1}b + \ldots + A_{m-1}ab^{m-1} + A_mb^m = 0 ;$$

d'où

$$A_0a^m = -b(A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2}b + \ldots + A_mb^{m-1}),$$
$$A_mb^m = -a(A_0a^{m-1} + A_1a^{m-2}b + \ldots + A_{m-1}b^{m-1}).$$

On voit que b divise $A_0 a^m$, et que a divise $A_m b^m$; donc, puisque a et b sont premiers entre eux, b est diviseur de A_0, et a diviseur de A_m.

161. Corollaire. — *Une équation à coefficients entiers, dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, n'a aucune racine fractionnaire.*

Car le dénominateur d'une telle racine doit diviser A_0, qui est supposé égal à 1.

162. Remarque. — *On peut toujours ramener la recherche des racines fractionnaires à celle des racines entières.*

Soit $F(x) = 0$ une équation à coefficients entiers. Si le premier coefficient est égal à l'unité, l'équation n'a aucune racine fractionnaire (**161**). Si ce coefficient est différent de l'unité, on transforme l'équation en une autre dont le premier coefficient est l'unité, en multipliant les racines par un nombre convenablement choisi k. Il suffit de chercher les racines entières de la nouvelle équation et de les diviser par k pour avoir toutes les racines commensurables de $F(x) = 0$.

Exemple. — $$12x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 5x + 6 = 0. \qquad (1)$$

On trouve facilement (**142**) $L = 2$, $L' = 2$. Les seuls nombres entiers qui puissent être racines sont donc $+1$ et -1. Comme $F(1) = -6$, $F(-1) = 0$, nous divisons $F(x)$ par $x + 1$, ce qui nous conduit à résoudre l'équation

$$12x^3 - 20x^2 - x + 6 = 0.$$

Celle-ci n'admettant plus la racine $x = -1$, nous la transformons en une autre ayant pour premier coefficient l'unité. En multipliant les racines par 6, on trouve

$$x^3 - 10x^2 - 3x + 108 = 0.$$

La règle énoncée ci-dessus (**158**) donne pour racines $-3, 4, 9$; les racines de (1) sont donc $-1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

Exercices et notes

1. Résoudre les équations

$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0$. Racines : $1, -1, -2, 3, \pm\sqrt{-1}$.

$2x^3 - 12x^2 + 13x + 15 = 0$. $(x - 3)$.

$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0$. (Racines : $3, -2$).

$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$. $\left(\text{Racines : } \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)$.

$8x^6 - 38x^5 + 57x^4 - 60x^3 + 52x^2 - 22x + 3 = 0$. $\left(\text{Racines : } 1, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

2. Une équation $F(x) = 0$, à coefficients entiers, n'a pas de racine entière, si le produit

$$F(a)F(a+1)F(a+2)\dots F(a+n+1),$$

où a désigne un nombre entier quelconque, n'est pas divisible par n.

Si ce produit est divisible par n^k, k est une limite supérieure du nombre des racines entières de $F(x) = 0$. (de Montebello.)

3. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible, racine de l'équation $F(x) = 0$, à coefficients entiers. Démontrer que les coefficients du quotient de $F(x)$ divisée par $x - \frac{a}{b}$ sont entiers et divisibles par a.

En effet, si l'on divise $F(x)$ par $bx - a$, les coefficients du quotient sont entiers ou des fractions dont les dénominateurs ne renferment pas d'autres facteurs premiers que ceux de b; si l'on effectue la même division en ordonnant suivant les exposants croissants de x, les coefficients du quotient sont entiers ou leurs dénominateurs ne renferment pas d'autres facteurs premiers que ceux de a. Le quotient étant le même dans les deux cas, ses coefficients sont entiers, etc.

4. Trouver les racines rationnelles des équations

$$x^3 - 3pqx + p^3 + q^3 = 0,$$
$$x^3 - (p^2 + pq + q^2)x + p^2q + pq^2 = 0,$$
$$x^3 - (a+b)^2x^2 + ab(2a^2 + ab + 2b^2)x - 2a^3b^3 = 0.$$

5. Si la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est racine de l'équation $F(x) = 0$, à coefficients entiers, $b - a$ divise $F(1)$, et $b + a$ divise $F(-1)$.

6. Si l'un des nombres $F(1)$, $F(-1)$ est impair, l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racine impaire.

7. Trouver les facteurs commensurables du second degré de $F(x)$.

On divise $F(x)$ par $x^2 + px + q$, ce qui donne un reste du premier degré $Rx + S$. On pose $R = 0$, $S = 0$ et l'on élimine p ou q entre ces égalités; on cherche les racines commensurables de l'équation ainsi obtenue, etc.

Autrement : Si l'équation admet une racine de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant commensurables, on décompose l'égalité $F(a + \sqrt{b}) = 0$ en deux autres :

$$F(a) + \frac{b}{2!}F''(a) + \frac{b^2}{4!}F^{\text{IV}}(a) + \ldots = 0, \quad F'(a) + \frac{b}{3!}F'''(a) + \ldots = 0,$$

et l'on élimine entre celles-ci, soit a, soit b, etc.

8. Etant donnée une fonction entière à coefficients entiers, trouver les facteurs de la forme $x^p - a$, a étant commensurable.

On met l'équation sous la forme

$$\varphi_0(x^p) + x\varphi_1(x^p) + \ldots + x^{p-1}\varphi_{p-1}(x^p) = 0,$$

φ_0 φ_1, .. désignant des fonctions entières ; les équations

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = 0, \quad \ldots \quad \varphi_{p-1}(z) = 0$$

devront avoir une racine rationnelle commune a.

CHAPITRE IX.

DES SOLUTIONS COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX POLYNOMES.

163. Préliminaires. — Soient A, B, ... des polynomes entiers en x.

On dit que C *divise* A *lorsqu'il existe un polynome entier* Q *qui, multiplié par* C, *reproduit identiquement* A.

Si C *divise* A, *il en est de même du produit de* C *par un facteur* h *indépendant de* x. Car l'égalité $A = CQ$ donne $A = hC \times \frac{Q}{h}$, et $\frac{Q}{h}$ est un polynome entier en x.

Dans la suite, nous ne regarderons pas comme différents deux diviseurs C, hC qui ne diffèrent que par un facteur indépendant de x.

Si C *divise* A, *il divise aussi le produit* AB, B *étant une fonction entière de* x *ou une quantité indépendante de* x. Car si A = CQ, on a AB = C × BQ, et BQ est une fonction entière de x.

Tout diviseur C *de* A *et* B *divise* AA′ + BB′, A′ *et* B′ *désignant des fonctions entières de* x *ou des quantités indépendantes de* x. Car, si A = CP et B = CQ, on a

$$AA' + BB' = C(A'P + B'Q),$$

et A′P + B′Q est une fonction entière de x.

Un polynome entier en x *est dit premier quand il n'est divisible que par lui-même* (multiplié par un facteur numérique si l'on veut) *ou par des facteurs indépendants de* x. Si l'on admet le théorème de D'Alembert, les seuls polynomes premiers sont ceux du premier degré. La théorie de la divisibilité algébrique, telle que nous l'exposons ici, est indépendante de cette proposition.

Deux fonctions entières de x *sont dites premières entre elles quand elles n'ont aucun diviseur commun en* x.

164. Règle du plus grand commun diviseur. — *On appelle plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers en* x, *le polynome entier de degré le plus élevé qui divise à la fois ces deux polynomes.*

Soient A et B deux fonctions entières de x, de degrés m et n respectivement ; nous supposons m supérieur ou égal à n.

Si B *divise* A, B *est le plus grand commun diviseur de* A *et* B. En effet, il n'existe pas de polynome de degré supérieur à n, divisant à la fois A et B, et tout polynome B′ de degré n qui divise à la fois A et B ne diffère de B que par un facteur constant, le quotient de B par B′ étant indépendant de x.

Supposons que B ne divise pas exactement A ; soient alors Q le quotient et R_1 le reste de la division de A par B, de sorte que

$$A = BQ + R_1.$$

Il est facile de voir que les polynomes A et B ont les mêmes diviseurs communs que B et R_1. Car tout polynome qui divise A et B divise A — BQ ou R_1, et tout diviseur de B et de R_1 divise BQ + R_1 ou A.

R_1 étant de degré moindre que B, divisons B par R_1 ; soit R_2 le reste. Si R_2 contient x, cherchons le reste R_3 de la division de R_1 par R_2, puis le reste R_4 de la division de R_2 par R_3, et ainsi de suite. Les degrés des restes successifs allant en diminuant, on arrive à un reste R_p indépendant de x. Il peut se présenter deux cas :

1° $R_p = 0$. A et B, d'après ce qu'on a vu, ont les mêmes diviseurs que B et R_1 : ceux-ci, en vertu du même raisonnement, ont les mêmes diviseurs que R_1 et R_2 ; et ainsi de suite. Les diviseurs de A et de B sont donc les mêmes que ceux de R_{p-2} et de R_{p-1}. Mais R_{p-1} est le polynome de degré le plus élevé qui divise à la fois R_{p-2} et R_{p-1} ; c'est donc aussi le plus grand commun diviseur de A et B.

2° R_p n'est pas nul. Tout diviseur de A et de B doit diviser R_{p-1} et R_p ; R_{p-1} et R_p n'ayant pas de diviseur commun en x, les polynomes A et B sont premiers entre eux.

On conclut de cette théorie la règle suivante :

Etant donnés deux polynomes A *et* B, *on divise* A *par* B, B *par le reste* R_1 *de cette division*, R_1 *par le reste* R_2 *de la deuxième division, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul ou à un reste indépendant de* x. *Dans le premier cas,* A *et* B *admettent un plus grand commun diviseur qui est le diviseur employé dans la dernière division ; dans le second cas,* A *et* B *sont premiers entre eux.*

Voici des remarques qui simplifient les calculs :

1° Pour éviter les coefficients fractionnaires, si le premier terme d'un dividende partiel n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur, on peut multiplier tous les coefficients de ce dividende par un nombre convenablement choisi.

2° Si tous les coefficients d'un diviseur sont divisibles par un même nombre, on peut les diviser par ce nombre.

En effet, A et B ont les mêmes diviseurs communs qu'un dividende partiel V et le diviseur correspondant V_1, ou les mêmes que αV et V_1 ou que V et $\frac{V_1}{\beta}$, pourvu que α et β soient indépendants de x.

165. Exemple. — $A = 2x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x - 5$,
$B = 2x^4 + x^3 - 13x^2 - 4x + 20$.

Voici le tableau des calculs :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x - 5 & 2x^4 + x^3 - 13x^2 - 4x + 20 \\ 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 & x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - 13x^2 - 4x + 20 & 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 \\ (^*)\ 6x^4 + 3x^3 - 39x^2 - 12x + 60 & x,\ -1 \\ -2x^3 - 25x^2 - 7x + 60 & \\ (^*)\ -6x^3 - 75x^2 - 21x + 180 & \\ -70x^2 - 35x + 175 & \\ (^*)\ 2x^2 + x - 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 & 2x^2 + x - 5 \\ 2x^2 + x - 5 & 3x + 1 \end{array}$$

La troisième division se faisant exactement, le plus grand commun diviseur des polynomes proposés est

$$2x^2 + x - 5.$$

166. Propriétés du plus grand commun diviseur :

1° *Les quotients de deux polynomes* A *et* B *par leur plus grand commun diviseur* D *sont des polynomes premiers entre eux.*

Soient A′, B′ ces quotients ; s'ils avaient un facteur commun D, on aurait

$$A = A'D = A''DD', \quad B = B'D = B''DD';$$

A″ et B″ étant des fonctions entières, A et B auraient un diviseur commun DD′, d'un degré plus élevé que D.

2° *Quand on multiplie ou divise deux polynomes* A *et* B *par un même polynome* C, *leur plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par* C.

Soient Q le quotient et R le reste de la division de A par B ; nous aurons A = BQ + R, et en multipliant par C :

$$AC = BC\,.\,Q + RC.$$

RC est d'un degré inférieur à celui de BC ; donc, si l'on multiplie deux polynomes par un même troisième, le quotient de

---

(*) On multiplie le dividende et le dividende partiel de la seconde division par 3 ; le reste est divisé par − 35. Le quotient de cette division n'est pas $x - 1$, mais $\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$.

leur division ne change pas et le reste est multiplié par le troisième polynome.

Cela posé, soit

$$A, B, R_1, R_2, \ldots, R_{p-2}, R_{p-1}$$

la suite des polynomes que l'on rencontre dans la recherche du plus grand commun diviseur de A et B. Le plus grand commun diviseur de AC et BC conduit à la suite

$$AC, BC, R_1C, R_2C, \ldots, R_{p-2}C, R_{p-1}C.$$

Par hypothèse, R_{p-2} est divisible par R_{p-1}; donc $R_{p-2}C$ est divisible par $R_{p-1}C$. Par conséquent, $R_{p-1}C$ est le plus grand commun diviseur de AC et BC; il est égal au produit par C du plus grand commun diviseur de A et B.

La démonstration est analogue quand on divise A et B par un facteur commun C.

3° *Tout polynome qui divise A et B divise leur plus grand commun diviseur.*

Car les diviseurs de A et de B divisent les restes successifs R_1, R_2, ...

167. Théorème. — *Si un polynome entier C divise le produit de deux polynomes entiers A et B et s'il est premier avec l'un des facteurs, il divise l'autre facteur.*

Soit

$$A, C, R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}, R_p$$

la suite des polynomes que l'on rencontre dans la recherche du plus grand commun diviseur de A et C. A et C étant premiers entre eux, le dernier reste R_p est indépendant de x et différent de zéro.

Si l'on applique le procédé du plus grand commun diviseur aux produits AB, CB, on obtient la suite

$$AB, CB, R_1B, R_2B, \ldots, R_{p-1}B, R_pB.$$

On en conclut que le p. g. c. d. de AB et CB est R_pB, ou simplement B; car $R_{p-1}B$ est divisible par R_pB. Mais C divise, par hypothèse, AB; il divise aussi CB; donc il divise également leur p. g. c. d. B.

168. Théorème. — *Si une fonction première divise un produit de plusieurs fonctions entières, elle divise nécessairement l'un des facteurs.*

169. Théorème. — *Tout polynome entier en* x *n'est décomposable qu'un seul produit de polynomes premiers.*

Corollaire. — I. *Pour qu'un polynome entier en* x *soit divisible par un autre polynome entier en* x, *il faut et il suffit qu'il contienne tous les facteurs premiers de cet autre, chacun au moins le même nombre de fois.*

II. *Le plus grand commun diviseur de deux fonctions entières de* x *est égal au produit de leurs facteurs premiers communs, chacun de ces facteurs étant pris avec le plus petit exposant qu'il porte dans l'une ou l'autre fonction.*

La démonstration des dernières propositions se fait comme celle des propositions analogues en arithmétique.

170. Théorème. — *Si l'on désigne par* R_1, R_2, ..., R_k, ..., *les restes successifs obtenus dans la recherche du p. g. c. d. de deux polynomes* A *et* B, *de degrés* m *et* n *respectivement, on a*

$$R_k \equiv AU_k + BV_k,$$

U_k *et* V_k *désignant des polynomes entiers en* x *dont les degrés sont respectivement égaux à* $n - n_{k-1}$, $m - n_{k-1}$, *si* n_i *désigne le degré de* R_i.

En effet, on a les identités

$$A = BQ + R_1 \quad B = R_1Q_1 + R_2, \quad R_1 = R_2Q_2 + R_3,$$
$$\ldots, \quad R_{k-2} = R_{k-1}Q_{k-1} + R_k, \text{ etc.}$$

La première donne

$$R_1 = A - BQ = AU_1 + BV_1,$$

pourvu que l'on pose $U_1 = 1$, $V_1 = -Q$. Le degré de U_1 est égal à $n - n$, celui de V_1 à $m - n$. On a ensuite

$$R_2 = B - R_1Q_1 = B - (A - BQ)Q_1 = AU_2 + BV_2,$$

après avoir posé $U_2 = -Q_1$, $V_2 = 1 + QQ_1$. Le degré de U_2 est égal à $n - n_1$, celui de V_2 à $(m - n) + (n - n_1) = m - n_1$.

La loi se vérifie donc pour R_1 (*) et R_2. Supposons-la établie pour tous les restes qui précèdent R_k, de sorte que

$$R_{k-2} = AU_{k-2} + BV_{k-2}, \quad R_{k-1} = AU_{k-1} + BV_{k-1}, \qquad (1)$$

(*) B remplace R_0, et $n_0 = n$.

U_{k-2} et V_{k-2} étant de degrés $m - n_{k-3}$, $n - n_{k-3}$, et U_{k-1}, V_{k-1} de degrés $m - n_{k-2}$, $n - n_{k-2}$. Si l'on porte les valeurs (1) dans la relation

$$R_{k-2} = R_{k-1}Q_{k-1} + R_k$$

on obtient

$$R_k = A(U_{k-2} + U_{k-1}Q_{k-1}) + B(V_{k-2} - V_{k-1}Q_{k-1}) \\ = AU_k + BV_k,$$

où

$$U_k = U_{k-2} - U_{k-1}Q_{k-1}, \quad V_k = V_{k-2} - V_{k-1}Q_{k-1}.$$

Comme $n_{k-2} > n_{k-1}$, U_{k-2} est de degré moindre que U_{k-1}, et le degré de U_k est celui de $U_{k-1}Q_{k-1}$ ou égal à

$$(m - n_{k-2}) + (n_{k-2} - n_{k-1}) = m - n_{k-1}.$$

De même le degré de V_k est celui de $V_{k-1}Q_{k-1}$ ou $n - n_{k-1}$.

La loi est donc générale.

171. Corollaires. — I. Si A et B sont premiers entre eux, on arrive à un reste numérique R_p. Le théorème précédent donne

$$R_p = AU_p + BV_p \quad \text{ou} \quad 1 = AU + BV,$$

U et V désignent $\frac{U_p}{R_p}$, $\frac{V_p}{R_p}$. Par conséquent :

Quand deux fonctions entières A *et* B, *de degrés* m *et* n *respectivement, sont premières entre elles, il existe deux fonctions entières* U, V *de degrés respectivement inférieurs à* n *et* m, *et telles, que l'on ait identiquement*

$$1 = AU + BV.$$

Les fonctions U, V sont uniques ; car si l'on avait

$$1 = AU' + BV',$$

on aurait

$$A(U - U') = B(V' - V);$$

par suite A qui est premier avec B, devrait diviser le polynome $V' - V$ dont le degré est inférieur à celui de A.

II. Si A et B ont un plus grand commun diviseur R_{p-1}, de degré q, le reste R_p étant nul, on a l'identité

$$0 = AU_p + BV_p.$$

dans laquelle U_p et V_p sont des fonctions entières, de degrés $n - q$ et $m - q$. Cette propriété se déduit aussi des égalités

$$A = A'R_{p-1}, \quad B = B'R_{p-1}$$

par l'élimination de R_{p-1}.

Des racines communes a deux équations.

172. Théorème. — *Soient* $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ *deux équations à coefficients numériques. Si les polynomes* $F(x)$, $f(x)$ *ont un plus grand commun diviseur* $\varphi(x)$, *l'équation* $\varphi(x) = 0$ *a pour racines les racines communes aux équations proposées.*

En effet, on a les identités

$$F(x) = \varphi(x)F_1(x), \quad f(x) = \varphi(x)f_1(x),$$

où $F_1(x)$ et $f_1(x)$ désignent des fonctions entières, premières entre elles. Toute racine de $\varphi(x)$ est racine de $F(x)$ et de $f(x)$; réciproquement, si a est m fois racine de $F(x)$ et n fois racine de $f(x)$ et que $m \leq n$, $(x - a)^m$ divise $F(x)$ et $f(x)$, et r sui te est diviseur de $\varphi(x)$.

Application. — Résoudre l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0, \tag{1}$$

sachant que l'une des racines est triple d'une autre.

Soient $3a$ et a ces racines; $3a$ est aussi racine de l'équation qu'on obtient en multipliant par 3 les racines de (1). Cette transformée est

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 108x + 243 = 0. \tag{2}$$

Les premiers membres de (1) et (2) ayant pour p. g. c. d. $x - 3$, on a $3a = 3$, $a = 1$. Divisant ensuite le premier membre de (1) par le produit $(x - 3)(x - 1)$ et égalant à zéro le quotient $x^2 + 1$, on voit que l'équation proposée a pour racines

$$3, \quad 1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}.$$

173. Résultant de deux polynomes (*). — Soient

$$F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m,$$
$$f(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n$$

(*) Dans cette partie du Cours, nous supposons connu le théorème (**118**). La méthode exposée ici est due à Euler.

deux polynomes à coefficients indéterminés. Pour qu'ils aient au moins un facteur linéaire commun, une certaine fonction de leurs coefficients doit être nulle; cette quantité est appelée le ***résultant*** ou l'***éliminant*** des polynomes $F(x)$ et $f(x)$.

Si $\varphi(x)$ est le produit de p facteurs linéaires communs à $F(x)$ et à $f(x)$, on peut poser

$$F(x) = \varphi(x)F_1(x), \quad f(x) = \varphi(x)f_1(x), \tag{1}$$

$F_1(x)$ et $f_1(x)$ étant des fonctions entières de degrés $m - p$ et $n - p$. De ces égalités, on tire l'*identité*

$$F(x)f_1(x) - f(x)F_1(x) = 0. \tag{2}$$

Réciproquement, lorsqu'il existe deux polynomes $F_1(x)$ et $f_1(x)$, de degrés $m - p$ et $n - p$, qui rendent identiquement nulle l'expression

$$F(x)f_1(x) - f(x)F_1(x), \tag{3}$$

$F(x)$ et $f(x)$ ont un p. g. c. d. qui est au moins de degré p. Car $F(x)$ divise le produit $f(x)F_1(x)$, et au plus $m - p$ facteurs linéaires de $F(x)$ appartiennent aussi à $F_1(x)$; donc $F(x)$ et $f(x)$ ont au moins p facteurs linéaires communs.

S'il n'existe qu'un seul système de polynomes $F_1(x)$ et $f_1(x)$, de degrés $m - p$ et $n - p$, qui rendent identiquement nulle l'expression (3), le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$ est de degré p. En effet, s'il était d'un degré supérieur à p, $F(x)$ et $f(x)$ auraient plusieurs communs diviseurs de degré p, et les égalités (1) et (2) auraient lieu de plus d'une manière.

Pour fixer les idées, supposons $m = 5$, $n = 3$, de sorte que

$$F(x) = A_0x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5,$$
$$f(x) = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x + B_3.$$

Si les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une seule racine commune, il existe un seul système de deux polynomes du 4e et du 2e degré,

$$F_1(x) = -\alpha_1x^4 - \alpha_2x^3 - \alpha_3x^2 - \alpha_4x - \alpha_5,$$
$$f_1(x) = \beta_1x^2 + \beta_2x + \beta_3,$$

tels, que l'on ait identiquement

$$F(x)(\beta_1x^2 + \beta_2x + \beta_3) + f(x)(\alpha_1x^4 + \alpha_2x^3 + \alpha_3x^2 + \alpha_4x + \alpha_5) = 0,$$

Or

$$\left.\begin{array}{rl}
x^2F(x) = & A_0x^7 + A_1x^6 + A_2x^5 + A_3x^4 + A_4x^3 + A_5x^2 \\
xF(x) = & A_0x^6 + A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A_5x \\
F(x) = & A_0x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 \\
x^4f(x) = & B_0x^7 + B_1x^6 + B_2x^5 + B_3x^4 \\
x^3f(x) = & B_0x^6 + B_1x^5 + B_2x^4 + B_3x^3 \\
x^2f(x) = & B_0x^5 + B_1x^4 + B_2x^3 + B_3x^2 \\
xf(x) = & B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x \\
f(x) = & B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x + B_3
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Ajoutons ces égalités après les avoir multipliées respectivement par

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5; \qquad (5)$$

le premier membre étant $F(x)f_1(x) - f(x)F_1(x)$, le second membre doit être identiquement nul, ce qui donne les équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}
A_0\beta_1 + B_0\alpha_1 = 0, \\
A_1\beta_1 + A_0\beta_2 + B_1\alpha_1 + B_0\alpha_2 = 0, \\
A_2\beta_1 + A_1\beta_2 + A_0\beta_3 + B_2\alpha_1 + B_1\alpha_2 + B_0\alpha_3 = 0, \\
A_3\beta_1 + A_2\beta_2 + A_1\beta_3 + B_3\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_1\alpha_3 + B_0\alpha_4 = 0, \\
A_4\beta_1 + A_3\beta_2 + A_2\beta_3 + B_3\alpha_2 + B_2\alpha_3 + B_1\alpha_4 + B_0\alpha_5 = 0, \\
A_5\beta_1 + A_4\beta_2 + A_3\beta_3 + B_3\alpha_3 + B_2\alpha_4 + B_1\alpha_5 = 0, \\
A_5\beta_2 + A_4\beta_3 + B_3\alpha_4 + B_2\alpha_5 = 0, \\
A_5\beta_3 + B_3\alpha_5 = 0,
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Ce système comprend huit équations homogènes par rapport aux huit inconnues (5). Par hypothèse, celles-ci ou plutôt leurs rapports ont des valeurs déterminées. Il en résulte (**78**) que le déterminant de ce système doit être nul. Ce déterminant, transposé, est

$$R = \begin{vmatrix}
A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & & \\
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \\
 & & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\
B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & & & \\
 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & & \\
 & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & \\
 & & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \\
 & & & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3
\end{vmatrix}; \qquad (7)$$

la place des éléments nuls a été laissée vide.

R est le résultant cherché. Dans le cas général de deux polynomes $F(x)$, $f(x)$ de degrés m, n, il est d'ordre $m+n$; les n premières lignes renferment les seuls coefficients de $F(x)$, les m dernières les seuls coefficients de $f(x)$; le terme diagonal est $A_0^n B_n^m$. R s'annule lorsque $A_0=0$, $B_0=0$; effectivement, les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont alors en commun une racine infinie.

Nous supposerons $A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$. Les inconnues (5) sont proportionnelles aux mineurs relatifs aux éléments d'une même colonne de R ; car si $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_8$ sont ces mineurs, la somme des produits des éléments d'une colonne quelconque de R respectivement multipliés par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_8$ est nulle, et les égalités ainsi obtenues ne diffèrent des équations (6) que par le changement de $\beta_1, \beta_2, \ldots$ en $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$.

Faisons correspondre $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ aux éléments de la dernière colonne de R ; alors

$$\Delta_1 = B_0 R_1, \quad \Delta_4 = -A_0 R_1,$$

où l'on a posé

$$R_1 = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ & & & B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix},$$

comme $\beta_1 : \alpha_1 = \Delta_1 : \Delta_4$ et que $F(x)$, $f(x)$ ont un seul facteur linéaire commun, on a nécessairement $R_1 \neq 0$.

174. Cas de deux racines communes. — Dans l'expression (3), nous pouvons maintenant prendre pour $F_1(x)$, $f_1(x)$ des polynomes de degré $m-2$, $n-2$. Considérons le cas particulier de $m=5$, $n=3$; nous obtenons les équations de condition en faisant, dans les égalités (6), $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$. Nous aurons ainsi le système

$$\left.\begin{array}{l} A_0\beta_2 + B_0\alpha_2 = 0, \\ A_1\beta_2 + A_0\beta_3 + B_1\alpha_2 + B_0\alpha_3 = 0, \\ A_2\beta_2 + A_1\beta_3 + B_2\alpha_2 + B_1\alpha_3 + B_0\alpha_4 = 0, \\ A_3\beta_2 + A_2\beta_3 + B_3\alpha_2 + B_2\alpha_3 + B_1\alpha_4 + B_0\alpha_5 = 0, \\ A_4\beta_2 + A_3\beta_3 + B_3\alpha_3 + B_2\alpha_4 + B_1\alpha_5 = 0, \\ A_5\beta_2 + A_4\beta_3 + B_3\alpha_4 + B_2\alpha_5 = 0, \\ A_5\beta_3 + B_3\alpha_5 = 0, \end{array}\right\} \quad (6')$$

composé de sept équations homogènes à six inconnues. Cinq de ces équations suffisent pour déterminer les rapports des inconnues; pour que le système soit possible, il faut que le déterminant ayant pour éléments les coefficients de six quelconques de ces équations soit nul (**78**). On a donc, en adoptant une notation connue (**79**),

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & & & \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \end{array}\right| = 0; \qquad (8)$$

c'est-à-dire les déterminants formés avec six quelconques des colonnes du tableau rectangulaire précédent sont nuls (*). Si l'on supprime la dernière colonne, on trouve le déterminant désigné ci-dessus par R_1.

Les valeurs de β_2, β_3, α_2, ... sont proportionnelles aux mineurs relatifs aux éléments d'une même colonne de l'un des déterminants (8), par exemple de R_1. En particulier, β_2 et α_2 sont entre eux comme les mineurs correspondants au 1[er] et au 3[e] élément de la dernière colonne de R_1, mineurs qui sont égaux aux produits de B_0 et de $-A_0$ par le déterminant

$$R_2 = \left|\begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ & B_0 & B_1 & B_2 \\ & & B_0 & B_1 \end{array}\right|.$$

On a donc $R_2 \neq 0$.

Ces développements s'étendent facilement au cas général de deux équations de degrés m et n, ayant p racines communes.

175. Méthode dialytique de Sylvester. — Soient les équations

$$F(x) = A_0x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 = 0,$$
$$f(x) = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x + B_3 = 0.$$

(*) Ces déterminants sont les cofacteurs des déterminants partiels formés avec la 1[re] et la 4[e] ligne de R. De cette remarque et du théorème de Laplace (**49**), on déduit que l'égalité multiple (8) a pour conséquence $R = 0$.

Une racine commune satisfait aux égalités

$$\left.\begin{array}{c} x^2F(x) = 0, \quad xF(x) = 0, \quad F(x) = 0, \\ x^4f(x) = 0, \quad x^3f(x) = 0, \quad x^2f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad f(x) = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Ce système est linéaire par rapport aux quantités

$$x^7, \quad x^6, \quad x^5, \quad x^4, \quad x^3, \quad x^2, \quad x,$$

que nous traitons comme des inconnues distinctes. Puisqu'il y a une équation de trop, le déterminant ayant pour éléments les coefficients des équations (9) doit être nul On retrouve ainsi la condition $R = 0$ (**173**). De plus, si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_8$ sont les mineurs de R relatifs à une même ligne, la racine commune satisfait aux égalités

$$\frac{x^7}{\delta_1} = \frac{x^6}{\delta_2} = \frac{x^5}{\delta_3} = \ldots = \frac{x}{\delta_7} = \frac{x_0}{\delta_8}. \quad (10)$$

Supposons ensuite que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient deux racines communes. On a encore $R = 0$; mais les mineurs de R sont également nuls, car le système linéaire (9) a plus d'une solution. Dans ce cas, si entre les équations

$$\begin{array}{c} xF(x) = 0, \quad F(x) = 0, \\ x^3f(x) = 0, \quad x^2f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad f(x) = 0, \end{array} \quad (11)$$

on élimine cinq des quantités

$$x^6, \quad x^5, \quad x^4, \quad x^3, \quad x^2, \quad x,$$

on obtient une équation du premier degré par rapport à l'inconnue restante $x^i (i = 1, 2, \ldots, 6)$; comme elle admet deux valeurs pour x^i, le coefficient de x^i et le terme indépendant doivent être séparément nuls. On trouve ainsi que les déterminants formés avec six colonnes quelconques du tableau rectangulaire

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & & \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \\ & & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

sont nuls ; l'un d'eux est le déterminant désigné ci-dessus par R_1.

Soient a et b les deux racines communes aux équations proposées. Au lieu des équations (11), on peut considérer les suivantes

$$\begin{vmatrix} aF(a) & 1 \\ bF(b) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F(a) & 1 \\ F(b) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a^3f(a) & 1 \\ b^3f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a^2f(a) & 1 \\ b^2f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} af(a) & 1 \\ bf(b) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

qu'on peut écrire ainsi après avoir posé $a^p - b^p = u_p$:

$$\begin{aligned}
A_0u_6 + A_1u_5 + A_2u_4 + A_3u_3 + A_4u_2 + A_5u_1 &= 0,\\
A_0u_5 + A_1u_4 + A_2u_3 + A_3u_2 + A_5u_1 &= 0,\\
B_0u_6 + B_1u_5 + B_2u_4 + B_3u_3 &= 0,\\
B_0u_5 + B_1u_4 + B_2u_3 + B_3u_2 &= 0,\\
B_0u_4 + B_1u_3 + B_2u_2 + B_3u_1 &= 0,\\
B_0u_3 + B_1u_2 + B_2u_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Pour qu'elles aient une solution non nulle, le déterminant des coefficients doit être nul, ce qui donne $R_1 = 0$. De plus, les quantités $u_6, u_5, \ldots, u_1$ sont proportionnelles aux mineurs de R_1 relatifs aux éléments d'une même ligne. (*)

Système de deux équations a deux inconnues.

176. Réduction du système primitif. — Soit à résoudre le système de deux équations non homogènes à deux inconnues

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0$$

Si l'on ordonne $F(x, y)$ par rapport à y, les coefficients peuvent avoir un p. g. c. d. X, fonction de x ; soit $F(x, y) \equiv Xf(x, y)$.

(*) Pour une étude plus complète sur l'élimination, le lecteur peut consulter les écrits suivants :

DARBOUX, *Sur la théorie de l'élimination* (Bull. des Sciences math. et astr., 1876) ;

LEMONNIER, *Mémoire sur l'élimination* (Ann. de l'Ec. normale sup., 1878) ;

ROUCHÉ, *Sur l'élimination* (Nouv. Ann. de Math., 1879) ;

MANSION, *Sur l'élimination* (Bull. de l'Acad. de Belgique, 1878 et 1879) ;

BIEHLER, *Sur la théorie des équations* (Paris, Gauthier-Villars, 1879) ;

Sur l'élimination (Nouv. Ann., 1882) ;

Sur l'élimination par la méthode d'Euler (Nouv. Ann., 1887) ;

POMEY, *Sur le plus grand commun diviseur de deux polynomes* (Nouv. Ann., 1888).

Le polynome $f(x, y)$ étant ensuite ordonné par rapport à x, les coefficients peuvent avoir un p. g. c. d. Y, fonction de y; soit $f(x, y) \equiv Y\varphi(x, y)$. Alors $F(x, y) \equiv XY\varphi(x, y)$. Supposons de même $F_1(x, y) \equiv X_1Y_1\varphi_1(x, y)$. Le système proposé prend ainsi la forme

$$XY\varphi(x, y) = 0, \quad X_1Y_1\varphi_1(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si les équations $X = 0$, $X_1 = 0$ ont une racine commune $x = a$, le système (1) est vérifié par $x = a$ et par une valeur quelconque de y. De même, une racine commune aux équations $Y = 0$, $Y_1 = 0$ et une valeur arbitraire de x constituent une solution des équations (1).

Soient a une racine quelconque de $X = 0$, b une racine de $Y_1 = 0$ ou de $\varphi_1(a, y) = 0$; le système (1) admet la solution $x = a$, $y = b$. De même, une racine b de $Y = 0$ et une racine de $X_1 = 0$ ou de $\varphi_1(x, b) = 0$ résolvent les équations (1).

D'autres solutions s'obtiennent en combinant une racine a de $X_1 = 0$ avec une racine de $\varphi(a, y) = 0$, ou une racine b de $Y_1 = 0$ avec une racine de $\varphi(a, y) = 0$, ou une racine b de $Y_1 = 0$ avec une racine de $\varphi(x, b) = 0$.

Enfin, il reste à résoudre le système

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \varphi_1(x, y) = 0. \tag{2}$$

177. Elimination par le plus grand commun diviseur. — Soient A, B les premiers membres des équations (2) ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x. Divisons A par B; appelons Q le quotient et R_1 le reste, de sorte que

$$A = BQ + R_1.$$

Si la division s'effectue sans introduire y en dénominateur, toute solution du système $[A = 0,\ B = 0]$ vérifie l'équation $R_1 = 0$, et toute solution du système $[B = 0,\ R_1 = 0]$ satisfait à l'équation $A = 0$. Le système $[A = 0,\ B = 0]$ est donc équivalent au système plus simple $[B = 0,\ R_1 = 0]$.

Divisons maintenant B par R_1, R_1 par le reste de cette division; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste r indépendant de x. Pour fixer les idées, soient

$$\begin{aligned} A &= BQ + R_1, \\ B &= R_1Q_1 + R_2, \\ R_1 &= R_2Q_2 + R_3, \\ R_2 &= R_3Q_3 + r. \end{aligned}$$

les égalités qui traduisent ces différentes opérations. Si les quotients Q, Q_1, Q_2, Q_3 sont entiers par rapport à y, le système $[A = 0, B = 0]$ est équivalent au système $[R_3 = 0, r = 0]$.

Trois cas peuvent se présenter :

1° r est fonction de y. L'équation $r = 0$ donne les valeurs cherchées de y ; si l'on substitue l'une de ces valeurs dans R_3, l'équation $R_3 = 0$ donne les valeurs correspondantes de x.

2° r est numérique. Le système $[R_3 = 0, r = 0]$ étant impossible, il en est de même du système proposé.

3° r est identiquement nul. R_3 divise R_2 et par suite R_1, B et A ; on peut donc poser

$$A = R_3A', \quad B = R_3B', \quad R_1 = R_3R'_1, \quad R_2 = R_3Q_3.$$

Le système $[A = 0, B = 0]$ peut être remplacé soit par l'équation $R_3 = 0$, soit par le système $[A' = 0, B' = 0]$. Mais les équations $A' = 0$, $B' = 0$ n'ont pas de solution commune; car en divisant les deux membres des égalités

$$A = BQ + R_1, \quad B = R_1Q_1 + R_2, \quad R_1 = R_2Q_2 + R_3$$

par R_3, on obtient

$$A' = B'Q + R'_1, \quad B' = R'_1Q_1 + R'_2, \quad R'_1 = R'_2Q_2 + 1,$$

de sorte que le système $[A' = 0, B' = 0]$ rentre dans notre second cas.

178. Solutions étrangères. — La recherche du p. g. c. d. des polynomes A et B introduit ordinairement des dénominateurs fonctions de y. Pour les éviter, on multiplie A par un facteur convenable C, fonction de y. Soient alors Q le quotient et R_1v_1 le reste, v_1 étant le p. g. c. d. des coefficients du reste ordonné par rapport à x. Nous aurons ainsi

$$CA = BQ + R_1v_1.$$

Toute solution de $[A = 0, B = 0]$ appartient à l'un des systèmes

$$[B = 0, R_1 = 0], \quad [B = 0, v_1 = 0].$$

Mais une solution de l'un de ceux-ci peut satisfaire soit au système primitif, soit au système $[B = 0, C = 0]$. Toutefois, si l'on a eu soin de débarrasser B des facteurs en y communs à

tous ses coefficients et de multiplier A par le facteur C le plus simple qui évite les dénominateurs, les solutions du système $|B = 0, v_1 = 0|$ n'appartiennent qu'au système primitif $|A = 0, B = 0|$. En effet, soit $y = \beta$ une racine commune aux équations $v_1 = 0, C = 0$; si l'on remplace y par β, l'identité $CA = BQ + R_1 v_1$ devient $BQ = 0$; on ne peut avoir $BQ = 0$ pour toute valeur de x que si tous les coefficients de B ou ceux de Q s'annulent, c'est-à-dire sont divisibles par $y - \beta$. Le polynome B étant supposé débarrassé de tout facteur commun à ses coefficients, Q est divisible par $y - \beta$; dès lors, il aurait suffi de multiplier A par $\frac{C}{y - \beta}$ au lieu de C pour obtenir un quotient entier.

Au système $|A = 0, B = 0|$ on peut donc substituer les deux systèmes

$$|B = 0, R_1 = 0|, \quad |B = 0, v_1 = 0|,$$

pourvu que l'on écarte les solutions de $|B = 0, R_1 = 0|$ qui vérifient l'équation $C = 0$ sans satisfaire à $A = 0$. L'une des équations du système $|B = 0, v_1 = 0|$ ne renfermant qu'une seule des inconnues, sa résolution ne présente pas de difficulté particulière. Quant au système $|B = 0, R_1 = 0|$, on le traite comme le système primitif (*).

179. Elimination par la méthode dialytique. — Ordonnons A et B par rapport aux puissances décroissantes de x. Soient alors

$$A = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$
$$B = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n,$$

les coefficients A_i, B_i étant des fonctions entières de y. Si $x = a$, $y = b$ est une solution du système $|A = 0, B = 0|$, les polynomes A et B, après le remplacement de y par b, acquièrent un diviseur commun $x - a$; donc leur résultant R doit être nul (**173**). Formons ce résultant en laissant subsister y dans les coefficients A_i, B_i : l'équation $R = 0$ sera l'*équation finale* en y.

(*) M. Labatie, ancien professeur à la faculté de Strasbourg, a fait connaître en 1832 un théorème qui résout toutes les difficultés de l'élimination par le p. g. c. d. (Voir le *Cours d'algèbre supérieure*, par M. J.-A. Serret, t. I, p. 198, 3e édition).

Pour trouver R, on éliminera, ainsi que nous l'avons vu (**175**)

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots,\ x$$

entre les équations

$$x^{n-1}A = 0,\quad x^{n-2}A = 0,\ \ldots,\ xA = 0,\quad A = 0,$$
$$x^{m-1}B = 0,\quad x^{m-2}B = 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ xB = 0,\quad B = 0.$$

APPLICATIONS.

180. Equation aux sommes des racines deux à deux. — Etant donnée l'équation $F(x) = 0$ de degré m, cherchons l'équation $f(u) = 0$ ayant pour racines les sommes des racines de $F(x) = 0$ prises deux à deux.

L'inconnue u a C_m^2 valeurs ; le degré de $f(u)$ est donc $\frac{1}{2}m(m-1)$. Si x_1, x_2 sont deux quelconques des racines de $F(x) = 0$, et u leur somme, on a les égalités

$$u = x_1 + x_2,\quad F(x_1) = 0,\quad F(x_2) = 0,$$

entre lesquelles on doit éliminer x_1 et x_2. L'équation en u sera donc le résultat de l'élimination de x_1 entre

$$F(x_1) = 0,\quad F(u - x_1) = 0.$$

La dernière équation peut être remplacée par l'équation

$$F(u - x_1) - F(x_1) = 0,$$

dont le premier membre est divisible par $(u - x_1) - x_1$, et qui, par suite, a la forme

$$(u - 2x_1)\varphi(u, x_1) = 0.$$

Si l'on élimine x_1 entre

$$F(x_1) = 0,\quad u - 2x_1 = 0,$$

on trouve l'équation

$$F\left(\frac{u}{2}\right) = 0,$$

qui est étrangère au problème : elle suppose que dans la formation des valeurs de u, on ajoute chaque racine de $F(x) = 0$

à elle-même. L'équation demandée s'obtient en égalant à zéro le résultant des polynomes $F(x)$, $\varphi(u, x)$.

181. Equation aux carrés des différences. — Etant donnée l'équation $F(x) = 0$ de degré m, formons l'équation $f(u) = 0$ dont les racines soient les différences deux à deux des racines de $F(x) = 0$.

L'équation $f(u) = 0$ s'obtient en éliminant x_1, x_2 entre

$$u = x_2 - x_1, \quad F(x_1) = 0, \quad F(x_2) = 0,$$

ou en éliminant x_1 entre les deux équations

$$F(x_1) = 0, \quad F(x_1 + u) = 0, \tag{1}$$

dont la dernière peut s'écrire ainsi

$$F(x_1) + uF'(x_1) + \frac{u^2}{1.2}F''(x) + \ldots = 0.$$

Le système (1) peut donc se ramener aux deux suivants :

$$F(x_1) = 0, \quad u = 0; \tag{2}$$

$$F(x_1) = 0, \quad F'(x_1) + \frac{u}{1.2}F''(x_1) + \ldots + \frac{u^{m-1}}{1.2\ldots m}F^{(m)}(x_1) = 0. \tag{3}$$

Le système (2) correspond aux valeurs de u qu'on obtient en combinant chaque racine de $F(x) = 0$ avec elle-même. L'équation demandée $f(u) = 0$ correspond au système (3); par suite, on égalera à zéro le résultant des polynomes

$$F(x), \quad F'(x) + \frac{u}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{u^{m-1}}{1.2\ldots m}F^{(m)}(x).$$

Le degré de $f(u)$ est égal au nombre des arrangements de m objets deux à deux, ou égal à $m(m-1)$; mais les valeurs de u étant deux à deux égales et de signes contraires (deux valeurs sont, par exemple, $x_1 - x_2$, $x_2 - x_1$), $f(u)$ ne renferme que des puissances paires de u et s'abaissera au degré $\frac{1}{2}m(m-1)$ si l'on pose $u^2 = v$. L'équation en v est dite l'*équation aux carrés des différences* de la proposée.

Exemple. — Soit

$$F(x) = x^3 + px + q.$$

L'équation auxiliaire $F(x+u)=0$ se ramène à

$$3x^2 + 3xu + u^2 + p = 0.$$

Appliquons le procédé du p. g. c. d. aux polynomes

$$x^3 + px + q, \quad 3x^2 + 3xu + u^2 + p$$

et égalons à zéro le reste ; nous aurons l'équation cherchée

$$u^6 + 6pu^4 + 9p^2u^2 + (4p^3 + 27q^2) = 0,$$

qu'on ramène au 3e degré en posant $u^2 = v$.

Exercices et notes.

1. Trouver les racines communes aux équations

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^4 - 5x^2 + x + 2 = 0.$$

2. Résoudre l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 3x + 12 = 0,$$

sachant que deux des racines ont pour produit 4.

3 Trouver la condition nécessaire pour que l'équation $F(x) = 0$ ait deux racines égales et de signes contraires. Examiner les cas de $m = 3$, $m = 4$.

On cherche le résultant des polynomes $F(x)$, $F(-x)$ ou plutôt celui de $F(x) + F(-x)$, $\dfrac{F(x) - F(-x)}{x}$. Ce résultant, appelé *géminant*, est égal au dernier terme de l'équation aux sommes des racines deux à deux de $F(x) = 0$.

4. L'équation qui a pour racines les quotients deux à deux des racines de $A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$, est

$$\begin{vmatrix} A_0u^3 & A_1u^2 & A_2u & A_3 & & \\ & A_0u^3 & A_1u^2 & A_2u & A_3 & \\ & & A_0u^3 & A_1u^2 & A_2u & A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \\ & & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, si l'on écarte la racine triple $u = 1$, et que l'on pose $u_2 = u^2 + u + 1$ $u_1 = u + 1$,

$$\begin{vmatrix} A_0u_2 & A_1u_1 & A_2 & & \\ & A_0u_2 & A_1u_1 & A_2 & \\ & & A_0u_2 & A_1u_1 & A_2 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Trouver l'équation aux produits deux à deux des racines de l'équation

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0.$$

La méthode la plus simple consiste à identifier l'équation donnée avec

$$(x^2 + zx + u)\left[x^2 + \left(\frac{A_1}{A_0} - z\right)x + \frac{A_4}{A_0u}\right] = 0,$$

et à éliminer z entre les deux équations de condition

6. Trouver l'équation aux cubes des racines de $F(x) = 0$.

Il faut éliminer x entre $F(x) = 0$ et $x^3 - y = 0$. Pour cela, on met l'équation proposée sous la forme $F_1(x^3) + xF_2(x^3) + x^2F_3(x^3) = 0$ ou $F_1(y) + xF_2(y) + x^2F_3(y) = 0$. Si on la multiplie par x, puis par x^2, on peut écrire

$$xF_1(y) + x^2F_2(y) + yF_3(y) = 0, \quad x^2F_1(y) + yF_2(y) + xyF_3(y) = 0;$$

Eliminons x et x^2 entre les trois dernières égalités, etc.

7. L'équation aux carrés des différences de $x^n - 1 = 0$ est

$$\begin{vmatrix} y^{n-1} & C_n^1 y^{n-2} & C_n^2 y^{n-3} & \dots & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & y^{n-1} & C_n^1 y^{n-2} & \dots & C_n^{n-2} y \\ C_n^{n-2} y & C_n^{n-1} & y^{n-1} & \dots & C_n^{n-3} y^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_n^1 y^{n-2} & C_n^2 y^{n-3} & C_n^3 y^{n-4} & \dots & y^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

On élimine x entre les équations $x^n - 1 = 0$, $(x + y)^n - 1 = 0$, en opérant comme dans l'exercice 6.

8. Trouver l'équation qui donne les longueurs des normales abaissées d'un point donné (α, β) sur la parabole représentée par $y^2 = 2px$.

CHAPITRE X.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Préliminaires.

182. Théorème. — *Si* a *est* p *fois racine de l'équation algébrique* F(x) = 0, *il est racine des équations*

$$F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0, \quad \dots, \quad F^{p-1}(x) = 0,$$

avec les degrés de multiplicité

$$p-1,\quad p-2,\quad \ldots,\quad 1;$$

mais il n'est pas racine de $F^{(p)}(x) = 0$.

En effet, $F(x) = F(a + x - a)$; d'où, par le théorème de Taylor,

$$F(x) = F(a) + (x-a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!}F^{(p)}(a) + \ldots$$

Par hypothèse, $F(x)$ est divisible par $(x-a)^p$ sans l'être par $(x-a)^{p+1}$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, sont évidemment

$$F(a) = 0,\quad F'(a) = 0,\quad F''(a) = 0,\quad \ldots,\quad F^{(p-1)}(a) = 0,\quad F^{(p)}(a) \neq 0;$$

donc a est racine de chacune des équations (1).

Ces mêmes conditions établissent que a est $(p-1)$ fois racine de $F'(x)$, $(p-2)$ fois racine de $F''(x)$, etc.; car a annule les $(p-2)$ premières dérivées de $F'(x)$, les $(p-3)$ premières dérivées de $F''(x)$, etc.

On démontre le même théorème en dérivant l'identité

$$F(x) \equiv (x-a)^p \varphi(x),$$

ce qui donne

$$F'(x) \equiv p(x-a)^{p-1}\varphi(x) + (x-a)^p\varphi'(x).$$

Comme $\varphi(x)$ n'est pas divisible par $x-a$, $F'(x)$ est divisible par $(x-a)^{p-1}$ sans l'être par $(x-a)^p$. De même, $F''(x)$ est divisible par $(x-a)^{p-2}$, etc.

183. Remarque. — *Si* a *est* q *fois racine de* F'(x), *ou il n'est pas racine de* F(x), *ou il l'est* (q + 1) *fois.*

Il peut se faire que a ne soit pas racine de $F(x)$. S'il est p fois racine de $F(x)$, il est $p-1$ fois racine de $F'(x)$; dans ce cas $p-1 = q$, d'où $p = q+1$.

184. Théorème. — *Le plus grand commun diviseur d'une fonction entière* F(x) *et de sa dérivée* F'(x) *est égal au produit des facteurs premiers multiples de* F(x), *l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité.*

Soit par exemple

$$F(x) = (x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r f(x),$$

$f(x)$ n'ayant que des facteurs premiers simples, différents de $x - a$, $x - b$, $x - c$. D'après le théorème (**182**), $F'(x)$ est divisible par $(x - a)^{p-1}$, $(x - b)^{q-1}$, $(x - c)^{r-1}$ sans l'être par $(x - a)^p$, $(x - b)^q$, $(x - c)^r$; de plus aucun facteur linéaire de $f(x)$ ne divise $F'(x)$. Donc le p. g. c. d. de $F(x)$ et $F'(x)$ est

$$(x - a)^{p-1}\,(x - b)^{q-1}\,(x - c)^{r-1}.$$

Réduction d'une équation qui a des racines égales.

185. Pour reconnaître qu'une équation $F(x) = 0$ a des racines égales, il suffit de voir si $F(x)$ et $F'(x)$ ont un commun diviseur en x. On peut aller plus loin et ramener la résolution de $F(x) = 0$ à la résolution d'autres équations donnant, respectivement, les racines simples, les racines doubles, les racines triples, ..., de a proposée, abstraction faite des degrés de multiplicité de ces racines.

Pour fixer les idées, considérons une équation $F(x) = 0$ qui a des racines simples, des racines doubles, des racines triples et des racines quadruples. Soient X_1 le produit des facteurs linéaires simples de $F(x)$, X_2 le produit des facteurs doubles, X_3 celui des facteurs triples, X_4 celui des facteurs quadruples, *chaque facteur étant pris une seule fois*. Nous aurons

$$F(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

Par des divisions successives on peut obtenir le p. g. c. d. D entre $F(x)$ et $F'(x)$; d'après le théorème ci-dessus,

$$D = X_2 X_3^2 X_4^3.$$

De même, on peut chercher le p. g. c. d. D_1 entre D et sa dérivée : $D_1 = X_3 X_4^2$.

De même encore le p. g. c. d. D_2 entre D_1 et sa dérivée : $D_2 = X_4$. On a ainsi le tableau suivant :

$$\begin{aligned} F(x) &= X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4, \\ D &= X_2 X_3^2 X_4^3, \\ D_1 &= X_3 X_4^2, \\ D_2 &= X_4. \end{aligned}$$

Divisons $F(x)$ par D, D par D_1, D_1 par D_2; soient Q, Q_1, Q_2 les quotients. Nous aurons

$$Q = X_1X_2X_3X_4, \quad Q_1 = X_2X_3X_4, \quad Q_2 = X_3X_4, \quad D_2 = X_4.$$

Divisons encore Q par Q_1, Q_1 par Q_2, Q_2 par D_2; il vient

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_2, \quad \frac{Q_2}{D_2} = X_3, \quad D_2 = X_4.$$

Donc, la résolution de $F(x) = 0$ est ramenée à la résolution d'autres équations donnant les racines d'un même degré de multiplicité. Ces nouvelles équations s'obtiennent au moyen de simples divisions.

186. Application. — $F(x) = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$

Le p. g. c. d. de $F(x)$ et $F'(x)$ est

$$D = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Le p. g. c. d. de D et sa dérivée est

$$D_1 = x - 1.$$

D_1 étant premier avec sa dérivée, l'équation n'a pas de racine d'un degré de multiplicité supérieur à 3; on voit même que l'équation $D_1 = 0$ donne la racine triple $x = 1$.

On a ensuite

$$\frac{F(x)}{D} = Q = x^4 + x^3 - x - 1, \quad \frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - 1, \quad D_1 = x - 1;$$

$$\frac{Q}{Q_1} = x^2 + x + 1 = X_1, \quad \frac{Q_1}{D_1} = x + 1 = X_2, \quad D_1 = X_3.$$

Conséquemment

$$F(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)^2 (x - 1)^3.$$

187. Remarques. — I. *Si une équation à coefficients commensurables admet une seule racine multiple de l'ordre* p, *cette racine est commensurable.*

Car de simples divisions servant à séparer X_1, X_2, ..., tous ces polynomes ont des coefficients commensurables. Mais, par hypothèse, X_p est du premier degré; donc la racine multiple de l'ordre p est commensurable.

II. La méthode des racines égales donne des calculs longs et pénibles. Lorsque le degré de l'équation ne dépasse pas 5, la méthode des racines commensurables (Chap. VIII) suffit.

En effet, une équation du 3[e] degré peut avoir une racine simple et une racine double, ou une racine triple; dans les deux cas, la racine multiple est commensurable (Voir remarque I).

Une équation du 4[e] degré peut avoir une racine quadruple, deux racines simples et une racine double, une racine simple et une racine triple, ou deux racines doubles. Dans les trois premiers cas, la racine multiple est commensurable; dans le dernier cas, le premier membre de l'équation est un carré parfait.

Soit une équation du 5[e] degré. Si elle a deux racines doubles et une racine simple, celle-ci est commensurable; en l'écartant de l'équation, on obtient une équation du 4[e] degré dont le premier membre est carré parfait. Dans les autres cas, une racine multiple est unique de son degré de multiplicité et par suite commensurable. L'équation peut même être résolue par des moyens élémentaires, excepté dans le cas où elle a une racine double et trois racines simples.

Emploi des polynomes homogènes. — Discriminant.

188. Théorème d'Euler. — Considérons la fonction de deux variables

$$F(x, y) = A_0x^m + A_1x^{m-1}y + A_2x^{m-2}y^2 + \dots + A_{m-1}xy^{m-1} + A_my^m.$$

On peut dériver $F(x, y)$ soit par rapport à la lettre x, soit par rapport à la lettre y; soient F'_x, F'_y les résultats. Des égalités

$$F(x, y) = \Sigma A_n x^{m-n}y^n,$$

$$F'_x = \Sigma(m-n)A_n x^{m-n-1}y^n, \quad F'_y = \Sigma n A_n x^{m-n}y^{n-1},$$

on déduit immédiatement l'identité

$$mF(x, y) = xF'_x + yF'_y. \tag{1}$$

F'_x admet une dérivée par rapport à x désignée par F''_{xx} ou ou F''_{x^2}, et une dérivée F''_{xy} par rapport à y; F'_y admet deux dérivées représentées par F''_{yx}, F''_{y^2}. On vérifie facilement que $F''_{xy} = F''_{yx}$.

La relation (1) appliquée aux polynomes F'_x, F'_y donne

$$(m-1)F'_x = xF''_{x^2} + yF''_{xy}, \quad (m-1)F'_y = xF''_{yx} + yF''_{x^2}. \quad (2)$$

Si l'on élimine F'_x et F'_y entre les égalités (1) et (2), il vient

$$m(m-1)F(x, y) = x^2F''_{x^2} + 2xyF''_{xy} + y^2F''_{y^2}. \quad (3)$$

Chacune des dérivées du second ordre, F''_{x^2}, F''_{xy}, F''_{y^2}, admet une dérivée par rapport à x et une dérivée par rapport à y, et l'on a

$$\left.\begin{aligned} (m-2)F''_{x^2} &= xF'''_{x^3} + yF'''_{x^2y}, \\ (m-2)F''_{xy} &= xF'''_{xyx} + yF'''_{xy^2}, \\ (m-2)F''_{y^2} &= xF'''_{y^2x} + yF'''_{y^3}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

On voit facilement que $F'''_{xyx} = F'''_{x^2y}$, $F'''_{y^2x} = F'''_{xy^2}$. Des égalités (3) et (4), on déduit

$$m(m-1)(m-2)F(x,y) = x^3F'''_{x^3} + 3x^2yF'''_{x^2y} + 3xy^2F'''_{xy^2} + y^3F'''_{y^3}. \quad (5)$$

En général,

$$m(m-1)\dots(m-p+1)F(x, y) =$$

$$x_pF^{(p)}_{x^p} + px^{p-1}yF^{(p)}_{x^{p-1}y} + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}y^2F^{(p)}_{x^{p-2}y^2} +$$

$$\dots + pxy^{p-1}F^{(p)}_{xy^{p-1}} + yF^{(p)}_{y^p}.$$

Le second membre de cette formule, abstraction faite des dérivées qui y entrent, est le développement de $(x+y)^p$.

189. Conditions pour qu'une équation homogène ait une racine multiple. — Soit a une racine multiple d'ordre p de l'équation

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m = 0;$$

le premier membre sera égal à $(x-a)^pf(x)$, $f(x)$ étant une fonction entière qui n'admet pas le diviseur $x-a$. Si l'on remplace x par $\frac{x}{y}$ et qu'on chasse les dénominateurs, on obtient l'identité

$$A_0x^m + A_1x^{m-1}y + \dots + A_{m-1}xy^{m-1} + A_my^m \equiv (x-ay)^pf(x, y),$$

où $f(x, y)$ n'est pas divisible par $x - ay$. Soit $F(x, y)$ le premier membre; $F(x, 1) = 0$ est alors l'équation proposée, et $F(1, y) = 0$ est la transformée aux inverses des racines (**138**). En dérivant l'égalité

$$F(x, y) \equiv (x - ay)^p f(x, y)$$

successivement par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$F'_x \equiv p(x - ay)^{p-1} f(x, y) + (x - ay)^p f'_x,$$

$$F'_y \equiv - ap(x - ay)^{p-1} f(x, y) + (x - ay)^p f'_y.$$

On voit que F'_x *et* F'_y *sont divisibles par* $(x - ay)^{p-1}$ *sans l'être par une puissance supérieure de* $x - ay$.

Réciproquement, *si les polynomes* F'_x *et* F'_y *sont divisibles par* $(x - ay)^{p-1}$, *sans qu'ils soient divisibles par* $(x - ay)^p$, *la plus haute puissance de* $x - ay$ *qui divise* $F(x, y)$ *est* $(x - ay)^p$. En effet : 1° l'égalité

$$mF(x, y) = xF'_x + yF'_y$$

montre que $F(x, y)$ admet le diviseur $(x - ay)^{p-1}$; 2° si une puissance supérieure $(x - ay)^{p+q}$ divisait $F(x, y)$, F'_x et F'_y seraient divisibles par $(x - ay)^{p+q-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse; 3° quand un diviseur $x - ay$ de F'_x divise aussi F'_y, il est diviseur avec un même degré de multiplicité de F'_x et de F'_y; car si $F(x, y)$ est divisible par $(x - ay)^q$, F'_x et F'_y le sont par $(x - ay)^{q-1}$.

F'_x et F'_y étant divisibles par la même puissance $(x - ay)^{p-1}$, leurs dérivées F''_{x^2}, F''_{xy}, F''_{y^2} sont divisibles par la même puissance $(x - ay)^{p-2}$ sans que l'une le soit par $(x - ay)^{p-1}$.

Réciproquement, si les trois dérivées du second ordre de $F(x, y)$ sont divisibles par $x - ay$, elles admettent ce diviseur avec un même ordre de multiplicité et $F(x, y)$ l'admet avec cet ordre augmenté de deux unités. En effet, si F''_{x^2} est divisible par $(x - ay)^{p-2}$, la dérivée F''_{xy} l'est également, puisqu'on suppose F''_{x^2} et F''_{xy} divisibles à la fois par $x - ay$; de plus, F'_x admet le diviseur $(x - ay)^{p-1}$. De même, F''_{xy} et F''_{y^2} étant divisibles par $x - ay$, la première de ces fonctions l'étant même par $(x - ay)^{p-2}$, la seconde l'est aussi par $(x - ay)^{p-2}$, et F'_y admet le diviseur

$(x - ay)^{p-1}$. Donc, d'après ce que l'on a déjà vu, $F(x, y)$ est divisible par $(x - ay)^p$.

En continuant ce raisonnement, on arrive au théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynome homogène $F(x, y)$ *soit divisible par* $(x - ay)^p$, *sont que toutes les dérivées du* $(p - 1)^e$ *ordre,*

$$F^{(p-1)}_{x^{p-1}}, \quad F^{(p-1)}_{x^{p-2}y}, \quad F^{(p-1)}_{x^{p-3}y^2}, \quad \ldots\ldots, \quad F^{(p-1)}_{xy^{p-2}}, \quad F^{(p-1)}_{y^{p-1}},$$

soient divisibles par $x - ay$ *sans que l'une d'elles le soit par une puissance supérieure de* $x - ay$.

Nous faisons observer que, si toutes les dérivées d'un même ordre de $F(x, y)$ sont divisibles par $x - ay$, et si l'une d'elles l'est par $(x - ay)^q$, toutes les autres sont aussi divisibles par $(x - ay)^q$.

190. Remarque. — Pour exprimer qu'une équation à coefficients indéterminés

$$F(x, y) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \ldots + A_m y^m = 0,$$

a une racine multiple d'ordre p (*), on applique le procédé du plus grand commun diviseur aux polynomes $F^{(p-1)}_{x^{p-1}}$, $F^{(p-1)}_{x^{p-2}y}$ jusqu'à ce qu'on arrive à un diviseur $Mx + Ny$ du premier degré et à un reste Ry^2. Une première condition est $R = 0$, et la racine multiple d'ordre p est $x = -\dfrac{Ny}{M}$; on exprime encore que cette racine annule les autres dérivées d'ordre $p - 1$ de $F(x, y)$.

191. Discriminant. — Pour exprimer qu'une équation homogène à coefficients indéterminés, $F(x, y) = 0$, a une racine double, il suffit d'égaler à zéro le résultant des polynomes F'_x, F'_y. Ce résultant se nomme le *discriminant* de $F(x, y)$.

192. Exemples. — I. Trouver la condition pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

ait une racine double.

(*) On peut sous-entendre que y est une variable d'homogénéité dont la valeur est arbitraire ou égale à l'unité.

Si l'on rend l'équation homogène, on est conduit à exprimer que les équations

$$3x^2 + py^2 = 0, \quad 2pxy + 3qy^2 = 0,$$

ont une racine commune. En faisant $y = 1$ et remplaçant dans la première équation x par sa valeur tirée de la seconde, on obtient

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

On trouve la même condition en exprimant que l'équation aux carrés des différences de (2) a une racine nulle (**181**).

II. Considérons l'équation complète

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0, \tag{2}$$

ou sous forme homogène

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0.$$

Une racine double satisfait aux équations dérivées :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0, \quad bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0.$$

Si l'on élimine, tour à tour, y^2 et x^2, on obtient les égalités

$$(ad - bc)x + 2(bd - c^2)y = 0, \quad 2(b^2 - ac)x + (bc - ad)y = 0.$$

Entre celles-ci il est facile d'éliminer les variables: on trouve

$$(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) = 0. \tag{3}$$

Comme l'équation (2) peut se ramener à la forme $x^3 + px + q = 0$, le discriminant peut être mis sous la forme $4p^3 + 27q^2$. Effectivement, si l'on multiplie l'égalité (3) par a^2, quelques transformations faciles donnent

$$(2b^3 - 3abc + ca^2)^2 + 4(ac - b^2)^3 = 0.$$

III. Prenons encore l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = 0.$$

Les équations dérivées sont

$$\left.\begin{aligned} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0\,. \\ bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En appliquant la méthode dialytique (175), on obtient

$$\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & & \\ & a & 3b & 3c & d & \\ & & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & & \\ & b & 3c & 3d & e & \\ & & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi éliminer, tour à tour, y^3 ou x^3 entre les équations (4) ce qui donne deux équations du 2^d degré ; éliminer entre celles-ci, tour à tour, y^2 ou x^2, ce qui donne deux équations du 1er degré, enfin, éliminer x et y entre les deux dernières équations.

Le discriminant de l'équation proposée se ramène à la forme

$$i^3 = 27j^2,$$

où

$$i = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$j = ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd.$$

Exercices et notes.

1. Si

$$F(x) = (x - a)^\alpha (b - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda,$$

démontrer que

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{\beta}{x - b} + \dots + \frac{\lambda}{x - l}.$$

2. Appliquer la méthode des racines égales aux équations

$$x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 - 612x^2 - 108x - 432 = 0,$$

$$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0.$$

3. Trouver les conditions nécessaires pour que l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

ait une racine triple.

Tirer x de $F''(x) = 0$ et substituer la valeur dans $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$; ou identifier $F(x)$ avec $(x - a)^3 (x - b)$.

4. Trouver les conditions nécessaires pour que $(x + y)^3$ divise

$$x^p + ax^{p-q}y^q + bx^{p-2q}y^{2q} + cx^{p-3q}y^{3q} + y^p.$$

5. Trouver les racines multiples de $800x^4 - 103x^2 - x + 3 = 0$.

Il est avantageux de remplacer x par $\frac{1}{x}$.

6. Exprimer que l'équation $x^m + px + q = 0$ a une racine double.

7. Déterminer un polynome entier en x du septième degré $F(x)$, sachant que $F(x) + 1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $F(x) - 1$ par $(x+1)^4$.

Quel est le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$?

(École normale de Paris, 1889.)

$F'(x)$ a la racine triple 1 et la racine triple -1 ; donc

$$F'(x) = a(x-1)^3(x+1)^3 = a(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1),$$

a étant une indéterminée. On en déduit

$$F(x) = a\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right) + b.$$

Les conditions $F(1) + 1 = 0$, $F(-1) - 1 = 0$ donnent $b = 0$, $a = \frac{35}{16}$.

L'équation $F(x) = 0$ a la racine $x = 0$ et deux autres racines réelles égales et de signes contraires (A déduire du théorème de Rolle, chap. XI).

8. Soient $F(x)$ et $f(x)$ dux polynomes premiers entre eux. Prouver que si l'équation $F^2(x) + f^2(x) = 0$ a une racine double, cette racine vérifie l'équation

$$F'^2(x) + f'^2(x) = 0.$$

9. Déterminer λ de manière que l'équation

$$x^5 + \lambda x^4 + 10x^3 + 1 = 0$$

ait une racine double.

CHAPITRE XI.

THÉORÈME DE ROLLE.

193. Lemme. — *Lorsque* x *variant d'une manière continue de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *passe par une racine de l'équation* $F(x) = 0$, *le rapport* $\frac{F(x)}{F'(x)}$ *passe du négatif au positif.*

Soit a une racine, p son degré de multiplicité ; nous aurons

$$F(x) = (x-a)^p \varphi(x),$$

$$F'(x) = p(x-a)^{p-1}\varphi(x) + (x-a)^p \varphi'(x).$$

$\varphi(x)$ étant un polynome qui ne s'annule pas pour $x = a$. Par suite,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{p}{x-a} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{F'(a \pm h)}{F(a \pm h)} = \pm \frac{p}{h} + \frac{\varphi'(a \pm h)}{\varphi(a \pm h)}.$$

Si h désigne une quantité positive suffisamment petite pour que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'ait pas de racine dans l'intervalle $(a - h, a + h)$, le quotient $\frac{\varphi'(a \pm h)}{\varphi(a \pm h)}$ a une valeur finie, tandis que la fraction $\frac{p}{h}$ a une valeur infiniment grande.

On en conclut :

$$\frac{F'(a-h)}{F(a-h)} < 0, \quad \frac{F'(a+h)}{F(a+h)} > 0.$$

194. Corollaire. — Si a est p fois racine de $F(x) = 0$, la suite

$$F(x), \quad F'(x), \quad F''(x), \quad \ldots, \quad F^{(p-1)}(x), \quad F^{(p)}(x). \qquad (1)$$

n'a que des variations pour $x = a - h$ et que des permanences pour $x = a + h$, pourvu que h soit positif et suffisament petit.

En effet, a étant racine des équations

$$F(x) = 0, \quad F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0, \quad \ldots, \quad F^{(p-1)}(x) = 0,$$

deux termes consécutifs de la suite (1) ont des signes contraires pour $x = a - h$ et le même signe pour $x = a + h$.

195. Définitions. — Deux racines réelles, a, b d'une équation sont dites *consécutives*, quand elles ne comprennent aucune autre racine.

On dit que deux nombres réels α, β *séparent* une racine de l'équation $F(x) = 0$, quand ils comprennent une racine et une seule.

Pour déterminer les racines incommensurables d'une équation, il importe de savoir *séparer* les différentes racines, c'est-à-dire de trouver deux nombres comprenant une racine et une seule. Le théorème de Rolle peut, dans certains cas, servir à résoudre ce problème.

196. Théorème de Rolle. — 1° *Deux racines consécutives d'une équation* $F(x) = 0$ *comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation dérivée* $F'(x) = 0$.

2° *Deux racines consécutives de l'équation dérivée comprennent au plus une racine réelle de la proposée.*

3° *L'équation* $F(x) = 0$ *a, au plus, une racine réelle plus grande que la plus grande racine réelle de* $F'(x) = 0$ *et, au plus, une racine réelle plus petite que la plus petite racine de* $F'(x) = 0$.

1° Soient a et b ($a < b$) deux racines réelles consécutives de $F(x) = 0$, et soit h un nombre positif aussi petit qu'on veut. D'après le lemme démontré ci-dessus,

$$\frac{F(a+h)}{F'(a+h)} > 0, \quad \frac{F(b-h)}{F'(b-h)} < 0.$$

Or $F(a+h)$ et $F(b-h)$ ont le même signe; autrement, les nombres $a+h$, $b-h$ comprendraient au moins une racine de $F(x) = 0$ (**127**), ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte que $F'(a+h)$ et $F'(b-h)$ sont de signes contraires; par conséquent l'équation $F'(x) = 0$ a un nombre impair de racines comprises entre $a+h$ et $b-h$ ou, ce qui revient au même, entre a et b.

2° Soient α, β ($\alpha < \beta$) deux racines réelles consécutives de $F'(x) = 0$. Si elles comprenaient plusieurs racines $a, b, \ldots$, ($a < b, \ldots$) de $F(x) = 0$, l'équation $F'(x) = 0$ aurait au moins une racine α' comprise entre a et b, etc.; α' étant compris entre α et β, les racines α, β ne seraient pas consécutives.

3° Si l'équation $F(x) = 0$ avait plusieurs racines $a, b, \ldots$ ($a < b \ldots$) plus grandes que la plus grande racine λ de $F'(x) = 0$, les nombres a, b comprendraient au moins une racine λ' de $F'(x) = 0$, ce qui implique contradiction, λ' étant plus grand que λ.

Raisonnement analogue pour la plus petite racine de $F'(x) = 0$.

197. Théorème. — *Les racines réelles de l'équation dérivée* $F'(x) = 0$ *peuvent servir à séparer les racines réelles de l'équation primitive* $F(x) = 0$.

Soient $a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1$ les racines réelles, supposées distinctes, et rangées par ordre croissant, de $F'(x) = 0$, et considérons la suite

$$-\infty, \; a_1, \; b_1, \; c_1, \; \ldots, \; l_1, \; +\infty. \qquad (2)$$

D'après le théorème précédent, deux termes consécutifs de cette suite comprennent, au plus, une racine de $F(x) = 0$. Substituons les nombres (2) à x dans $F(x)$ et considérons les signes des quantités

$$F(-\infty),\ F(a_1),\ F(b_1),\ F(c_1),\ \ldots,\ F(l_1),\ F(\infty). \qquad (3)$$

Les variations de cette suite de signes font connaître les intervalles de la suite (2) qui comprennent une racine de l'équation $F(x) = 0$ et une seule. Par exemple, suivant que $F(a_1)$ et $F(b_1)$ sont de même signe ou de signes contraires, l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racine comprise entre a_1 et b_1 ou en a une seule appartenant à l'intervalle (a_1, b_1).

Si l'un des nombres a_1, b_1, ..., par exemple b_1 annule $F(x)$, b_1 est une fois de plus racine de $F(x)$ que de $F'(x)$ (**183**). Pour voir si les intervalles (a_1, b_1), (b_1, c_1) comprennent une racine de $F(x)$, on compare les signes de $F(a_1)$ et $F(b_1 - h)$, et ceux de $F(b_1 + h)$ et $F(c_1)$, h désignant une quantité positive très petite (*). On ne peut avoir à la fois $F(a_1) = 0$, $F(b_1) = 0$; car la dérivée $F'(x)$ aurait alors une racine comprise entre a_1 et b_1, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Application. — Séparer les racines de l'équation

$$F(x) \equiv 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 7 = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, il y a une ou trois racines positives, une racine négative. L'équation dérivée

$$F'(x) \equiv 12x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

admettant les racines 0, 2, 3, nous formons le tableau suivant

$$\begin{array}{lccccc} x \ldots & -\infty, & 0, & 2, & 3, & +\infty \\ F(x) \ldots & +\infty, & -7, & 25, & 20, & +\infty. \end{array}$$

Les variations de la seconde ligne montrent que l'équation proposée a une racine négative et une seule racine positive, comprise entre 0 et 2. Comme $F(1) = 12$, la seconde racine est moindre que 1.

(*) Les signes de $F(b_1 - h)$ et $F(b_1 + h)$ sont ceux de $-F'(b_1 - h)$ et $F'(b_1 + h)$ (**193**) et ces derniers signes se déterminent facilement.

198. Théorème. — *Si l'équation* F(x) = 0 *a toutes ses racines réelles et inégales, les racines de l'équation dérivée* F'(x) = 0 *sont réelles, inégales et séparées par celles de* F(x) = 0.

En effet, soient $a, b, c, \ldots, k, l$ les m racines de $F(x) = 0$ supposées distinctes et rangées par ordre croissant. Chacun des $(m - 1)$ intervalles (a, b), (b, c), ..., (k, l) comprend au moins une racine de l'équation $F'(x) = 0$; comme celle-ci est de degré $(m - 1)$, il y a précisément une racine dans chacun des intervalles.

199. Remarques. — I. Le théorème précédent subsiste également dans le cas des racines égales, pourvu que l'on considère une racine multiple d'ordre p comme équivalente à p racines consécutives.

Pour fixer les idées, supposons que b soit p fois racine de $F(x) = 0$ et représentons la suite des racines par

$$a, \; b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_p, \; c, \; d, \; \ldots, \; l, \tag{4}$$

où $b_1 = b_2 = \ldots = b_p = b$; cette suite offre $(m - 1)$ intervalles. Comme b est $(p - 1)$ fois racine de $F'(x) = 0$, on peut attribuer une racine à chacun des intervalles formés par la suite $b_1, b_2, \ldots, b_p$; les autres intervalles de la suite (4) comprennent au moins une racine de $F'(x) = 0$. On en conclut que toutes les racines de $F'(x) = 0$ sont réelles et séparées par les racines de $F(x) = 0$.

II. On démontre, de la même manière, la proposition suivante :

Si l'équation F(x) = 0 *a* p *racines comprises entre deux nombres donnés, l'équation* F'(x) = 0 *en a au moins* p − 1 *dans le même intervalle, une racine multiple d'ordre* q *étant comptée pour* q *racines simples.*

III. Réciproquement, *si l'équation* F'(x) = 0 *a* p' *racines réelles dans un intervalle donné, l'équation* F(x) = 0 *en a, au plus,* p' + 1 *dans le même intervalle.*

Car de $p' > p - 1$ on déduit $p < p' + 1$.

Il résulte de là que l'équation $F(x) = 0$ a, au moins, autant de racines imaginaires que la dérivée $F'(x) = 0$.

200. Application. — Cherchons les conditions pour que l'équation

$$F(x) \equiv A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + A_3 = 0$$

ait trois racines réelles et inégales.

Soient a, b, c ces racines rangées par ordre croissant. D'après le théorème de Rolle, $F'(x)$ a une racine α comprise entre a et b, et une racine β comprise entre b et c. Inversement, $F(x)$ a une racine a comprise entre $-\infty$ et α, une racine b entre α et β, une racine c entre β et $+\infty$. Si donc on suppose $A_0 > 0$, la substitution de

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad +\infty$$

à la place de x dans $F(x)$ donne des résultats ayant les signes

$$- \quad + \quad - \quad +.$$

On voit que $F'(x)$ a deux racines réelles α, β et que $F(\alpha)\,F(\beta) < 0$.

L'inégalité $F(\alpha)\,F(\beta) < 0$ suffit pour assurer la réalité des trois racines de $F(x)$. D'abord, lorsque les racines α, β de $F'(x)$ sont imaginaires ou réelles et égales, le produit $F(\alpha)\,F(\beta)$ est, respectivement, un produit de deux imaginaires conjuguées ou un carré parfait et, par suite, positif ; donc la relation $F(\alpha)\,F(\beta) < 0$ ne subsiste que si les racines α, β de $F'(x)$ sont réelles et inégales. Ensuite, si l'on suppose $A_0 > 0$, $\alpha < \beta$, la dérivée $F'(x)$, égale à $A_0(x-\alpha)(x-\beta)$, est négative dans l'intervalle (α, β) ; donc $F(x)$ est décroissante et l'on a $F(\alpha) > F(\beta)$, de sorte que l'inégalité $F(\alpha)\,F(\beta) < 0$ entraîne $F(\alpha) > 0$, $F(\beta) < 0$.

Le produit $F(\alpha)\,F(\beta)$ peut prendre une forme remarquable. En effet, introduisons une variable d'homogénéité y et posons

$$F(x, y) = A_0x^3 + 3A_1x^2y + 3A_2xy^2 + A_3y^3.$$

L'identité d'Euler (**188**) donne

$$3F(x, y) = xF'_x(x, y) + yF'_y(x, y) ;$$

d'où, en remplaçant y par l'unité et x par les racines α, β de $F'(x)$

$$F(\alpha, 1) = \frac{1}{3}F'_y(\alpha, 1), \quad F(\beta, 1) = \frac{1}{3}F'_y(\beta, 1).$$

Par conséquent

$$F(\alpha)\,F(\beta) = (A_1\alpha^2 + 2A_2\alpha + A_3)(A_1\beta^2 + 2A_2\beta + A_3).$$

Substituons encore les valeurs

$$\alpha = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - A_0A_2}}{A_0}, \quad \beta = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_0A_2}}{A_0};$$

il vient

$$F(\alpha)F(\beta) = \frac{(2A_1^3 - 3A_0A_1A_2 + A_3A_0^2)^2 + 4(A_0A_2 - A_1^2)^3}{A_0^4}$$

$$= \frac{(A_0A_3 - A_1A_2)^2 - 4(A_1^2 - A_0A_2)(A_2^2 - A_1A_3)}{A_0^2}.$$

Pour que l'équation $F(x) = 0$ ait une racine double, on doit avoir $F(\alpha) = 0$ ou $F(\beta) = 0$; par suite

$$(A_0A_3 - A_1A_2)^2 - 4(A_1^2 - A_0A_2)(A_2^2 - A_1A_3) = 0,$$

ainsi qu'on l'a trouvé ci-dessus (**192**, II).

Exercices et notes.

1. Appliquer le théorème de Rolle à la séparation des racines des équations :

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0, \quad x^3 - 12x + 3 = 0,$$
$$x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 5 = 0, \quad 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0.$$

2. Soit $F(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles. Les équations dérivées $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$, ... ont toutes leurs racines réelles. Plus généralement, si l'équation homogène $F(x, y) = 0$ n'a que des racines réelles, il en est de même de l'équation $F^{(p+q)}_{x^p y^q} = 0$.

3. La m^e dérivée de l'expression $\frac{(x^2-1)^m}{2^m . m!}$ est désignée par X_m et porte le nom de polynome de Legendre. Démontrer que l'équation $X_m = 0$ a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 et $+1$.

4. Si m est impair, l'équation

$$F(x) \equiv \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \frac{x^{m-2}}{m-2} + \dots + x + a = 0$$

a une seule racine réelle. Si m est pair, elle a deux racines réelles au plus.

On a $F'(x) = \frac{x^m - 1}{x - 1}$. Quand m est impair, on a constamment $F'(x) > 0$: donc $F(x)$ croît sans cesse avec x et s'annule pour une seule valeur de x, de signe contraire à a. Quand m est pair, $F'(x)$ s'annule pour une seule valeur réelle $x = -1$, qui est racine simple de $F'(x) = 0$; de plus, $F'(x) < 0$ ou > 0 suivant que $x < -1$ ou > -1 de sorte que $F(x)$ décroît dans l'intervalle $(-\infty, -1)$ et croît dans l'intervalle $(-1, \infty)$. Donc, si $F(-1) > 0$, toutes les racines de $F(x) = 0$ sont imaginaires. Si $F(-1) < 0$, l'équation proposée a une racine dans l'intervalle $(-\infty, -1)$ et une seconde racine dans l'intervalle $(-1, +\infty)$; celle-ci est comprise entre -1 et 0 ou est positive suivant que a est positif ou négatif. Enfin, si $F(-1) = 0$, l'équation $F(x) = 0$ a une racine double $x = -1$ et n'a pas d'autre racine réelle.

L'équation

$$ax^m + x^{m-1} + \frac{x^{m-2}}{2} + \frac{x^{m-3}}{3} + \ldots + \frac{x}{m-1} + \frac{1}{m} = 0$$

se ramène à la précédente par la substitution $x = \frac{1}{y}$.

5. Si k est un nombre réel, deux racines consécutives de l'équation $F(x) = 0$ comprennent un nombre impair de racines de l'équation

$$F_1(x) \equiv F(x) - kF'(x) = 0. \qquad \text{(Waring.)}$$

$F_1(x)$ jouit des propriétés de $F'(x)$ qui interviennent dans le théorème de Rolle. En effet : 1° Une racine multiple, d'ordre p, de $F(x) = 0$ est $p-1$ fois racine de $F_1(x) = 0$. 2° Si h est un nombre positif assez petit, les rapports

$$\frac{F(a-h)}{F_1(a-h)}, \quad \frac{F(a+h)}{F_1(a+h)}$$

ont des signes contraires; car, si a est p fois racine de $F(x) = 0$, on a

$$F(a+h) = \frac{h^p}{p!} F^{(p)}(a) + \ldots, \quad F_1(a+h) = -\frac{kh^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p)}(a) + \ldots,$$

et les signes de $F(a+h)$, $F_1(a+h)$ sont ceux des premiers termes de leurs développements. Cela posé, si a et b sont deux racines consécutives de $F(x) = 0$, $F(a+h)$ et $F(b-h)$ étant de même signe, $F_1(a+h)$ et $F_1(b-h)$ sont de signes contraires.

Remarques. — I. Les racines réelles de $F_1(x)$, jointes à $-\infty$ et $+\infty$, peuvent servir à séparer les racines de $F(x)$.

II. Si $F(x)$ a p racines réelles, $F_1(x)$ en a au moins $p-1$ ou plutôt en a au moins p, car $F(x)$ et $F_1(x)$ sont de même degré.

III. Si $F(x)$ n'a que des racines réelles, il en est de même de $F_1(x)$

6. Si l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de

$$F_p(x) \equiv a_0 F(x) + a_1 F'(x) + a_2 F''(x) + \ldots + a_p F^{(p)}(x) = 0,$$

a_0, a_1, a_2, ... étant des constantes telles, que l'équation

$$f(x) \equiv a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p = 0$$

ait toutes ses racines réelles. (Hermite.)

En effet, considérons les polynomes

$$F_1(x) \equiv F(x) - k_1 F'(x), \quad F_2(x) \equiv F_1(x) - k_2 F'_1(x), \quad \ldots$$
$$F_p(x) \equiv F_{p-1}(x) - k_p F'_{p-1}(x) \equiv F(x) - \Sigma k_1 . F'(x) + \Sigma k_1 k_2 . F''(x) \ldots .$$

Les équations $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$, ..., $F_p(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles (ex. 5). Prenons pour k_1, k_2, ..., k_p les racines $f(x) = 0$, etc.

Remarque. — Plus généralement, l'équation $F_p(x) = 0$ a au plus autant de racines imaginaires que l'équation $F(x) = 0$.

7. L'équation

$$\varphi(x) = F(x) + aF'(x) + a^2F''(x) + \ldots + a^mF^{(m)}(x) = 0$$

a, au plus, autant de racines réelles que l'équation $F(x) = 0$. (HERMITE.)

On a $\varphi(x) - a\varphi'(x) = F(x)$: donc, d'après l'exercice 5, l'équation $F(x) = 0$ a au moins autant de racines réelles que $\varphi(x) = 0$.

8. Soit $F(x)$ une fonction entière de degré m, et posons

$$F_1(x) = F(x) - k(x - \lambda)F'(x);$$

deux racines consécutives de $F(x) = 0$ comprennent un nombre impair de racines de $F_1(x) = 0$ (on suppose $F(\lambda) \neq 0$).

La suite formée par $-\infty$, les racines de $(x - \lambda)F_1(x)$ et $+\infty$ peut servir à séparer les racines de $F(x)$. (WARING).

En effet : 1° Si a est p fois racine de $F(x) = 0$, il est $(p-1)$ fois racine de $F_1(x) = 0$. 2° Si h est un nombre positif assez petit, le produit $F(a-h)F_1(a-h)$ a le signe de $k(a-\lambda)$, et $F(a+h)F_1(a+h)$ a le signe contraire. Donc, a et b désignant deux racines consécutives de $F(x) = 0$, $F(a+h)$ et $F(b-h)$ ont le même signe, et le produit $F_1(a+h)F_1(b-h)$ a le signe de $-(a-\lambda)(b-\lambda)$. Par conséquent, si $a < b < \lambda$ ou $\lambda < a < b$, a et b comprennent un nombre impair de racines de $F_1(x) = 0$, et si $a < \lambda < b$, a et b comprennent un nombre pair de racines de $F_1(x) = 0$ ou un nombre impair de racines de l'équation $(x-\lambda)F_1(x) = 0$, etc.

Remarque. — Si l'équation $F(x) = 0$ a p racines réelles, l'équation $F_1(x) = 0$ en a au moins $(p-2)$; elle en a au moins p lorsque λ n'est pas compris entre la plus petite et la plus grande racine de $F(x) = 0$ et que $k \neq \frac{1}{m}$, car les équations $F(x) = 0$, $F_1(x) = 0$ étant de même degré, les nombres de leurs racines réelles sont de même parité. Réciproquement, si l'équation $F_1(x) = 0$ a q racines réelles, l'équation $F(x) = 0$ en a, au plus, $q + 2$.

9. Soient $f(x)$ le quotient et $\varphi(x)$ le reste de la division de $F(x)$ par $F'(x)$. Les racines de $F'(x) = 0$ séparent celles de $\varphi(x) = 0$, et les racines de l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ séparent celles de $F(x) = 0$ (*).

Pour toute racine a de $F'(x) = 0$, on a $F(a) = \varphi(a)$, et si $F'(x)$ est divisible par $(x-a)^p$ et que $F(a) = 0$, $F(x)$ et $\varphi(x)$ sont divisibles par $(x-a)^p$. Pour la seconde partie du théorème, on applique l'exercice 8 à $F(x) - f(x)F'(x)$.

10. Si l'on multiplie les coefficients d'une équation

$$F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

par les termes correspondants d'une progression arithmétique, l'équation nouvelle a au moins une racine entre deux racines consécutives de $F(x) = 0$, excepté entre la plus petite racine positive et la racine négative qui précède.

Soient $c - mb$, $c - (m-1)b$, ..., c la progression. L'équation nouvelle est $F_1(x) = cF(x) - bxF'(x) = 0$. Appliquer l'exercice 8.

(*) Nous disons ici que des nombres rangés par ordre croissant séparent les racines d'une équation donnée lorsque deux termes consécutifs de la suite comprennent une seule racine ou n'en comprennent aucune.

Corollaire. — Si $F(x)$ a p racines positives, n racines négatives, V variations, et que p_1, n_1, V_1 sont les mêmes nombres relatifs à $F_1(x)$, on a

$$p_1 > p,\ n_1 > n, \quad \text{ou} \quad p_1 > p-1,\ n_1 > n-1,$$

suivant que les termes de la progression $c - mb$, $c - (m-1)b$, ..., c sont tous de même signe ou qu'il y en a de positifs et de négatifs.

Car chacun des intervalles formés par les racines positives de $F(x)$ comprend au moins une racine de $F_1(x)$, d'où $p_1 > p - 1$. Dans le 1er cas, $V = V_1$; $V - p$ et $V_1 - p_1$ étant des nombres pairs, $p_1 - p$ est pair, et l'on a $p_1 > p$. Dans le 2^d cas, V et V_1 sont de parités différentes, etc.

11. L'équation

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^n}{1.2..n} = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles. (SYLVESTER.)

On a $F(x) - F'(x) = \frac{x^n}{1.2..n}$; appliquer l'exercice 5.

12. L'équation

$$F(x) = 1 + ax + \frac{a(a+1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{1.2..n}x^n = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles, si $a > 0$ ou si $a < -n$. (SYLVESTER.)

On trouve aisément l'identité

$$F(x) - \frac{1}{a}(1-x)F'(x) = \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{1.2.(n-1)}x^n.$$

D'après l'exercice 8, les nombres $-\infty$, 0, 1, ∞ séparent les racines de $F(x) = 0$. Le cas de $a > 0$ se traite facilement. Si $a = -a'$, on observe que

$$F(x) = 1 - a'x + \frac{a'(a'-1)}{1.2}x^2 - \dots + (-1)^n \frac{a'(a'-1)\dots(a'-n+1)}{1.2\dots n}x^n ;$$

d'où, en réduisant les trois premiers termes, puis les quatre premiers, etc.,

$$F(1) = (-1)^n \frac{(a'-1)(a'-2)\dots(a'-n)}{1.2..n}, \text{ etc.}$$

13. L'équation

$$\varphi(x) = \frac{1}{p!} + \frac{x}{(p+1)!} + \dots + \frac{x^n}{(p+n)!} = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles. (SYLVESTER.)

Posons

$$\frac{x^p}{p!} + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \frac{x^{p+n}}{(p+n)!} = F(x),$$

de sorte que $F(x) = x^p \varphi(x)$. On a

$$F^{(p)}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

L'équation $F^{(p)}(x) = 0$ ayant au moins $p - 2$ racines imaginaires (voir ex. 11), il est de même (**199**, III) de l'équation $F(x) = 0$, et aussi de l'équation $\varphi(x) = 0$.

14. Soit $F(x)$ une fonction entière de degré m, et soit

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p = 0$$

une équation dont toutes les racines sont réelles. On effectue la division de 1 par $f(x)$ suivant les puissances croissantes de x ; soit

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

le quotient ainsi obtenu. Démontrer que l'équation

$$\varphi(x) \equiv b_0 F(x) + b_1 F'(x) + b_2 F''(x) + \ldots + b_m F^{(m)}(x) = 0,$$

a, au plus, autant de racines réelles que l'équation $F(x) = 0$. (POULAIN.)

Il suffit de démontrer (ex. 6) que

$$F(x) \equiv a_0 \varphi(x) + a_1 \varphi'(x) + a_2 \varphi''(x) + \ldots + a_p \varphi^{(p)}(x).$$

Or, si l'on arrête le quotient $\frac{1}{f(x)}$ au terme $b_m x^m$, le reste correspondant à la forme $x^{m+1}\psi(x)$, $\psi(x)$ désignant une fonction entière, et l'identité

$$1 \equiv (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p) + x^{m+1}\psi(x)$$

donne les égalités

$$a_0 b_0 = 1, \; a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \; \ldots \; a_q b_0 + a_{q-1} b_1 + \ldots + a_0 b_q = 0, \; \ldots \quad (\alpha)$$

où l'on suppose $a_i = 0$ si $i > p$, et $b_i = 0$ si $i > m$.

On a ainsi les relations

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\equiv b_0 F(x) + b_1 F'(x) + \ldots + b_m F^{(m)}(x), \\ \varphi'(x) &\equiv \qquad\quad b_0 F'(x) + \ldots + b_{m-1} F^{(m)}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(m)}(x) &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots \; b_0 F^{(m)}(x) ; \end{aligned}$$

ajoutons-les membre à membre après avoir multipliées respectivement par a_0, a_1, ... a_m, et tenons compte des relations (α), etc.

15. Soient m_0, m_1, m_2, ... m_m, les coefficients du développement de $(1 + z)^m$. Démontrer que l'équation

$$m_0^2 + m_1^2 x + m_2^2 x^2 + \ldots + m_m^2 x^m = 0$$

a toutes ses racines réelles. (H. LAURENT.)

Cette question ne diffère pas essentiellement de l'exercice 3. En effet, si l'on pose $u = (z^2 - 1)^m$, l'équation $u^{(m)} = 0$ a m racines comprises entre -1 et $+1$. Or, si l'on pose $\alpha = (z-1)^m$, $\beta = (z+1)^m$, on trouve

$$u^{(m)} = (\alpha\beta)^{(m)} + m_1 \alpha' \beta^{(m-1)} + m_2 \alpha'' \beta^{(m-2)} + \dots + \alpha^{(m)} \beta.$$

Le terme général de $u^{(m)}$ est

$$m_n \alpha^{(n)} \beta^{(m-n)} = m_n \times m(m-1)\dots(m-n+1)(z-1)^{m-n} \times m(m-1)\dots(n+1)(z+1)^n$$
$$= 1.2.3\dots m . m_n^2 (z-1)^{m-n}(z+1)^n;$$

Donc, si l'on fait $\dfrac{z+1}{z-1} = x$, on a

$$u^{(m)} = n!\,(z-1)^m[1 + m_1^2 x + m_2^2 x^2 + \dots + m_1^2 x^{m-1} + x^m], \quad \text{etc.}$$

CHAPITRE XII.

THÉORÈME DE STURM.

---

201. Fonctions de Sturm. — Soit $V = 0$ une équation algébrique, à coefficients réels et n'ayant pas de racines égales, et soit V_1 la dérivée de V. Faisons sur V et V_1 les opérations du p. g. c. d., mais en changeant à chaque opération le signe du reste, et en prenant le reste ainsi modifié pour diviseur de la division suivante.

Désignons les restes, changés de signe, par $V_2, V_3, \dots V_r$, et les quotients par $Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-1}$; nous aurons les identités :

$$\left.\begin{array}{ll} V & = V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 & = V_2 Q_2 - V_3, \\ \dots & \dots \\ V_{n-1} & = V_n Q_n - V_{n+1}, \\ \dots & \dots \\ V_{r-2} & = V_{r-1} Q_{r-1} - V_r. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Les fonctions V, V_1 n'ont pas de facteur commun, puisque les racines de $V = 0$ sont inégales ; donc le dernier reste V_r est indépendant de x et différent de zéro.

On appelle *fonctions de Sturm* les quantités

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_r. \qquad (2)$$

202. Théorème de Sturm. — *Soit $V = 0$ une équation algébrique à coefficients réels et qui n'a pas de racines égales. Le nombre des racines réelles de cette équation, comprises entre deux nombres réels α, β, est égal au nombre de variations perdues par la suite de Sturm relative à* V, *quand on substitue à* x *le nombre α, puis le nombre β, en supposant $\alpha < \beta$.*

Autrement dit : écrivons sur une première ligne les signes des résultats qu'on obtient en remplaçant dans la suite des fonctions de Sturm x par α ; écrivons sur une seconde ligne les signes des résultats qui correspondent à $x = \beta$. Soient n_α le nombre des variations de la première ligne, n_β celui de la seconde ligne : la différence $n_\alpha - n_\beta$ est égale au nombre des racines de V, comprises entre α et β.

Le théorème résulte des propriétés suivantes de la suite de Sturm ;

1° Les fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_{r-1}$ varient d'une manière continue avec x.

2° Le dernier terme V_r a un signe invariable.

3° Deux fonctions consécutives ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x.

4° Si une valeur $x = \gamma$ annule une fonction intermédiaire V_n, les fonctions voisines V_{n-1} et V_{n+1} ont, pour $x = \gamma$, des valeurs égales et de signes contraires.

5° Enfin, quand x traverse, en croissant, une racine de l'équation $V = 0$, le rapport $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif.

Les deux premières propriétés sont évidentes. Pour démontrer la troisième considérons l'identité

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}. \qquad (3)$$

Si une même valeur de x annulait V_n et V_{n+1}, elle annulerait aussi V_{n-1} : annulant V_n et V_{n-1}, elle annulerait V_{n-2} ; et ainsi de suite. Donc V et V_1 aurait un facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse (**182**).

Soit γ une racine de $V_n = 0$; si l'on remplace x par γ dans

l'égalité (3), on trouve $V_{n-1} = -V_{n+1}$. Donc V_{n-1} et V_{n+1} ont des signes contraires pour toute valeur de x annulant V_n.

Si γ désigne une racine de $V = 0$, le rapport $\frac{V}{V_1}$ est négatif pour $x = \gamma - h$ et positif pour $x = \gamma + h$ (**193**).

Cela posé, faisons croître x d'une manière continue de α à β. La suite des signes des fonctions de Sturm ne peut éprouver de changement que lorsqu'une fonction passe par zéro. Examinons successivement le cas où x passe par une valeur annulant une fonction intermédiaire V_1, V_2, ..., V_{r-1}, et celui où x passe par une racine de V.

Soit γ une racine de V_n : on sait que pour $x = \gamma$, V_{n-1} et V_{n+1} ont des signes contraires. Si h est une quantité suffisamment petite pour que V_{n-1} et V_{n+1} ne s'annulent pas dans l'intervalle $(\gamma - h, \gamma + h)$, les signes des fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1} sont par exemple,

	V_{n-1}	V_n,	V_{n+1}
$x = \gamma - h$	$+$	»	$-$;
$x = \gamma$	$+$	0	$-$;
$x = \gamma + h$	$+$	»	$-$.

Quel que soit le signe de V_n pour $x = \gamma - h$ et pour $x = \gamma + h$, les trois fonctions présentent une seule variation, tant pour $x = \gamma - h$ que pour $x = \gamma + h$; seulement la variation se déplace si V_n change de signe au passage de x par la valeur γ.

Si γ désigne une racine de V, le rapport $\frac{V}{V_1}$ est négatif pour $x = \gamma - h$, positif pour $x = \gamma + h$: donc, quand x traverse, en croissant, une racine de V, la suite de Sturm perd une variation qui était placée entre V et V_1.

D'après cela, lorsque x croît de α à β, la suite des fonctions de Sturm perd une variation chaque fois que x passe par une racine de V et n'en perd que dans ce cas ; en outre, elle n'en gagne jamais. Il en résulte que la différence entre les nombres de variations qui correspondent respectivement à $x = \beta$ et à $x = \alpha$, est égale au nombre des racines de V, comprises entre α et β.

203. Remarques. — I. Pour faciliter les divisions qu'exige le calcul des fonctions de Sturm, on multiplie, s'il y a lieu, un dividende par un nombre convenablement choisi ou l'on divise un reste par un facteur commun à ses coefficients (*). Il est bien entendu que les facteurs introduits ou supprimés sont essentiellement positifs.

II. Si l'on sait qu'une fonction V_p de la suite de Sturm conserve un signe invariable dans l'intervalle (α, β), on peut arrêter la suite à V_p. Cette remarque résulte de la démonstration donnée ci-dessus.

III. Le théorème de Sturm est applicable à toute suite de fonctions V, V_1, ... V_r jouissant des propriétés énoncées ci-dessus; il n'est pas nécessaire que V_1 soit la dérivée de V ni que les fonctions se déduisent les unes des autres par le procédé du p. g. c. d.

IV. La 5e propriété pourrait être remplacée par celle-ci : le rapport $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif chaque fois que x passe par une racine de V. Dans ce cas, le nombre des racines comprises entre α et β est égal au nombre de variations *gagnées* par la suite de Sturm quand x passe de α à β.

V. Si α ou β annule une fonction intermédiaire V_n, on compte une variation pour les trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n-1}.

Si α est racine de V, on donne à V le signe contraire à V_1. Cela revient à faire la substitution $x = \alpha - h$. Les signes de V_1, V_2, V_3, ... sont les mêmes pour $\alpha - h$ que pour α.

De même, dans le cas où β annule V on donne à V le signe de V_1, c'est-à-dire on substitue $\beta + h$ au lieu de β dans la suite de Sturm.

204. Exemple. — Soit l'équation $V = x^4 - 2x^2 + x - 1 = 0$.

Le théorème de Descartes indique l'existence d'une ou de trois racines positives; celui de Sturm donne une indication plus précise.

(*) Les fonctions ainsi modifiées continuent à être désignées par V, V_1, V_2, ...

Voici le tableau des calculs :

$$
\begin{array}{rl|l}
V = & x^4 - 2x^2 + x - 1 & 4x^3 - 4x + 1 = V_1 \\
(^*) & 4x^4 - 8x^2 + 4x - 4 & x \\
-V_2 = & -4x^2 + 3x - 4 & \\
 & 4x^3 \qquad - 4x + 1 & 4x^2 - 3x + 4 \\
 & 3x^2 - 8x + 1 & x, + 3 \\
(^*) & 12x^2 - 32x + 4 & \\
-V_3 = & - 23x - 8 & \\
 & 4x^2 - 3x + 4 & 23x + 8 \\
(^{**}) & 2116x^2 - 1587x + 2116 & 92x - 101 \\
 & - 736x & \\
 & - 2323x + 2116 & \\
 & + 808 & \\
-V_4 = & + 2924 &
\end{array}
$$

Ainsi :

$$V = x_4 - 2x^2 + x - 1, \quad V_1 = 4x^3 - 4x + 1,$$
$$V_2 = 4x^2 - 3x + 4, \quad V_3 = 23x + 8, \quad V_4 = -2924.$$

On a ensuite :

	V	V_1	V_2	V_3	V_4
$x = 0$ ...	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x = +\infty$ ...	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$.

Pour $x = 0$, la suite a deux variations; pour $x = \infty$, une variation. Comme une variation se perd, l'équation a une seule racine positive.

205. Conditions de réalité des racines. — Le nombre des racines réelles de V est égal au nombre de variations que perd la suite de Sturm quand on y remplace x successivement par $-\infty$ et par $+\infty$.

Cherchons les conditions nécessaires pour que toutes les racines soient réelles. Si V est de degré m, V_1 est de degré $m - 1$ et le nombre des fonctions de Sturm est au plus égal à $m + 1$. Le nombre des variations de la suite de Sturm pour

(*) On multiplie par 4.
(**) On multiplie par 23^2.

$x = -\infty$ est donc au plus égal à m. On en conclut que *la suite doit être complète* et que *les coefficients des premiers termes des fonctions doivent être positifs*. En effet, les fonctions ont, pour $x = +\infty$, le signe du premier terme et les degrés des premiers termes sont alternativement pairs et impairs, ou impairs et pairs : par conséquent, si les conditions indiquées sont remplies, la suite ne présente que des variations pour $x = -\infty$ et n'offre que des permanences pour $x = +\infty$.

Comme les premiers termes de V et V_1 ont le même signe, le nombre des conditions est au plus égal à $m - 1$; il est inférieur à $m - 1$ si les conditions rentrent les unes dans les autres.

206. Application au troisième degré. — Soit

$$V = x^3 - px + q.$$

Nous aurons

$$V_1 = 3x^2 + p, \quad V_2 = -2px - 3q, \quad V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Les conditions énoncées sont

$$-p > 0, \quad 4p^3 + 27q^2 < 0;$$

elles se réduisent à

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

207. Cas des racines multiples. — Soit $X = 0$ une équation ayant des racines égales ; soit X_1 la dérivée de X. Appliquons le procédé du p. g. c. d. à X et X_1, en ayant soin de changer le signe de chaque reste avant de le prendre comme diviseur de la division suivante. Appelons X_2, X_3, ..., X_r, les restes ainsi modifiés. Comme l'équation $X = 0$ a des racines égales, X et X_1 ont un p. g. c. d., égal au produit des facteurs premiers multiples de X, chaque exposant étant diminué d'une unité ; ce plus grand commun diviseur est ici X_r. La suite des opérations donne les identités

$$\begin{aligned}
X &= X_1Q_1 - X_2,\\
X_1 &= X_2Q_2 - X_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
X_{n-1} &= X_nQ_n - X_{n+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
X_{r-2} &= X_{r-1}Q_{r-1} - X_r,\\
X_{r-1} &= X_rQ_r.
\end{aligned}$$

Les fonctions X, X_1, X_2, ..., X_r sont divisibles par X_r; posons

$$\frac{X}{X_r} = V, \quad \frac{X_1}{X_r} = V_1, \ldots, \quad \frac{X_{r-1}}{X_r} = V_{r-1}, \quad \frac{X_r}{X_r} = V_r = 1.$$

V a les mêmes racines que X, avec cette différence que les racines multiples de X sont racines simples de V.

La suite

$$V, \; V_1, \; V_2, \ldots, \; V_{r-1}, \; V_r \qquad (A)$$

jouit des mêmes propriétés que la suite de Sturm. En effet, ces fonctions sont continues et la dernière a un signe invariable; une valeur de x qui annule V_n donne à V_{n-1} et V_{n+1} des signes contraires, car de $X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1}$ on déduit $V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}$; enfin, le rapport $\frac{V}{V_1}$, égal à $\frac{X}{X_1}$, passe du négatif au positif lorsque x passe par une racine de $V = 0$ (**193**).

Il résulte de là que si, dans la suite (A), on remplace x successivement par α et par β, le nombre des variations que perd cette suite est égal au nombre des racines de V, comprises entre α et β ou à celui des racines de X, comprises dans le même intervalle abstraction faite de leur degré de multiplicité.

Il est inutile de calculer les fonctions V, V_1, V_2, .. : les substitutions $x = \alpha$, $x = \beta$ peuvent se faire dans la suite des fonctions

$$X, \; X_1, \ldots, \; X_r,$$

qui ne diffèrent des premières que par un même facteur X_r.

Théorème de Budan (*).

208. Théorème. — *Etant donnée une équation algébrique entière* $F(x) = 0$, *de degré* m, *le nombre des racines réelles de*

(*) Budan communiqua à l'Académie des Sciences l'énoncé de son théorème dès 1803 et la démonstration complète en 1811. Fourier ayant donné de ce théorème une nouvelle démonstration plus claire, on lui a souvent attribué, par erreur, la proposition elle-même. La démonstration de Fourier présente une entière analogie avec celle que Sturm a donnée de son théorème.

Nous suivons ici une Note que M. Fouret a publiée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1 92, p. 82.

cette équation, comptées avec leur degré de multiplicité, qui sont comprises entre α *et* $\beta > \alpha$, *est égal, ou inférieur d'un nombre pair, au nombre des variations que perd la suite*

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ \ldots,\ F^{(m)}(x), \tag{1}$$

lorsqu'on y fait consécutivement $x = \alpha$, $x = \beta$.

Quand x croît d'une manière continue de α à β, la suite des signes des fonctions (1) ne peut éprouver de modification qu'à l'instant où x atteint et dépasse une valeur annulant quelqu'une de ces fonctions.

Considérons d'abord une racine a, d'ordre de multiplicité p, de $F(x) = 0$. On a vu (**183**) que la suite

$$F(x),\ F'(x),\ \ldots,\ F^{(p-1)}(x),\ F^{(p)}(x) \tag{2}$$

présente p variations pour $x = a - h$ et n'offre que des permanences pour $x = a + h$, h désignant un nombre positif aussi petit qu'on veut; donc *elle perd* p *variations, quand* x *passe, en croissant, par une racine, multiple d'ordre* p, *de* $F(x) = 0$.

Soit maintenant b une racine, multiple d'ordre q, de $F^{(n)}(x) = 0$. D'après la remarque précédente, la suite

$$F^{(n)}(x),\quad F^{(n+1)},\ \ldots,\ F^{(n+q)}(x)$$

perd q variations, lorsque x passe, en croissant, par la valeur b. Par conséquent, lors même que l'intervalle de $F^{(n-1)}(x)$ à $F^{(n)}(x)$ acquerrait une variation, *la suite*

$$F^{(n-1)}(x),\quad F^{(n)}(x),\quad F^{(n+1)}(x),\quad \ldots,\quad F^{(n+q)}(x)$$

ne peut gagner aucune variation, quand x *passe, en croissant, par une racine, multiple d'ordre* q, *de* $F^{(n)}(x) = 0$.

Cela posé, soient V_α, V_β les nombres de variations que présente la suite (1) pour $x = \alpha$ et pour $x = \beta$. Lorsque x croissant d'une manière continue de α à β passe par une racine de $F(x)$, la suite (1) perd autant de variations qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine; lorsque x passe par une valeur annulant une fonction intermédiaire, la suite (1) ne gagne aucune variation. Il résulte de là que la différence $V_\alpha - V_\beta$ est au moins égale au nombre N des racines de $F(x)$ comprises entre α et β, chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité.

Si N est impair, $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ sont de signes contraires (**129**); $F^{(m)}(x)$ étant une constante, les nombres V_α, V_β sont de parités différentes; donc $V_\alpha - V_\beta - N$ est un nombre pair. Semblablement, si N est pair, $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ ayant le même signe, V_α et V_β sont de même parité; donc le nombre $V_\alpha - V_\beta - N$ est encore pair.

209. Remarques. — I. Dans les applications, on peut arrêter la suite (1) à une dérivée qui ne change pas de signe dans l'intervalle (α, β).

II. Si le nombre substitué α (ou β) annule une ou plusieurs fonctions intermédiaires de la suite (1), on prend pour V_α (ou V_β) le nombre de variations que présente la suite pour $x = \alpha$ (ou β), abstraction faite des fonctions qui s'annulent.

En effet, si α et β ne sont pas racines de $F(x)$, on peut, pour appliquer le théorème de Budan, substituer $\alpha + h$ et $\beta + h$ à x dans la suite (1), pourvu que h désigne un nombre positif suffisamment petit. Les fonctions qui ne sont pas nulles pour $x = \alpha$ ont le même signe pour $x = \alpha + h$ que pour $x = \alpha$. Supposons que α annule les fonctions consécutives $F^{(n)}(x)$, $F^{(n+1)}(x)$, ..., $F^{(n+q-1)}$; alors la suite

$$F^{(n-1)},\quad F^{(n)}(x),\quad F^{(n+1)}(x),\quad \ldots,\quad F^{(n+q-1)}(x),\quad F^{(n+q)}(x)$$

présente, pour $x = \alpha + h$, autant de variations que la suite $F^{(n-1)}(\alpha)$, $F^{(n+q)}(\alpha)$; car les quantités $F^{(n)}(\alpha + h)$, $F^{(n+1)}(\alpha + h)$, ..., $F^{(n+q)}(\alpha + h)$ ont un même signe (**193**). Le raisonnement est le même quand β annule plusieurs dérivées de $F(x)$.

III. Le nombre des racines de $F(x)$, supérieures à un nombre donné α, est égal, ou inférieur d'un nombre pair, au nombre V_α des variations de la suite

$$F(\alpha),\quad F'(\alpha),\quad F''(\alpha),\quad \ldots,\quad F^{(m)}(\alpha).$$

En effet, le nombre de ces racines est égal, ou inférieur d'un nombre pair, à la différence $V_\alpha - V_\infty$; mais $V_\infty = 0$, etc.

Si $\alpha = 0$, on retrouve le théorème de Descartes; car la suite

$$F(0),\quad F'(0),\quad F''(0),\quad \ldots,\quad F^{(m)}(0)$$

reproduit les coefficients de $F(x)$ à des facteurs positifs près.

Inversement, du théorème de Descartes on peut conclure le cas particulier du théorème de Budan que nous venons de

traiter. Car les racines de $F(x)$, supérieures à α, sont les valeurs positives de x qui vérifient l'équation

$$F(\alpha + x) = F(\alpha) + xF'(\alpha) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(\alpha) + \ldots + \frac{x^m}{m!} F^{(m)}(\alpha) = 0.$$

210. Cas où toutes les racines sont réelles. — *Quand une équation* $F(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, le nombre de ces racines, comprises entre* α *et* β, *est égal à la différence des nombres de variations que présente la suite*

$$F(x), \quad F'(x), \quad F''(x), \quad \ldots, \quad F^{(m)}(x),$$

quand on y substitue consécutivement α *et* β.

En effet, soient N le nombre des racines supérieures à α, N' celui des racines inférieures à α; le théorème de Budan donne

$$N \leq V_\alpha - V_\infty, \quad N' \leq V_{-\infty} - V_\alpha,$$

ou simplement

$$N \leq V_\alpha, \quad N' \leq m - V_\alpha, \quad \text{d'où} \quad N + N' \leq m.$$

Par hypothèse, $N + N' = m$; donc le signe $<$ est exclu des relations précédentes, et $N = V_\alpha$, $N' = m - V_\alpha$.

De même, le nombre des racines supérieures à β est égal à V_β. Donc celui des racines comprises entre α et β est égal à $V_\alpha - V_\beta$.

Remarque. — Soient M, N, P les nombres des racines de $F(x) = 0$, appartenant respectivement aux intervalles $(-\infty, \alpha)$, (α, β), (β, ∞). On a

$$M \leq V_{-\infty} - V_\alpha, \quad P \leq V_\beta - V_\infty,$$

d'où, en additionnant,

$$M + P \leq m - (V_\alpha - V_\beta).$$

Supposons que la suite de Budan perde $N + 2K$ variations dans le passage de $x = \alpha$ à $x = \beta$, de sorte que $V_\alpha - V_\beta = N + 2K$; la relation précédente devient

$$M + P \leq m - N - 2K, \quad \text{ou} \quad m - (M + N + P) \geq 2K.$$

Mais $m - (M + N + P)$ est le nombre des racines imaginaires de $F(x)$. On a donc le théorème suivant : *Si une équation* $F(x) = 0$ *a N racines comprises entre* α *et* β, *et que la suite de Budan perde N + 2K variations dans le passage de* $x = \alpha$ *à* $x = \beta$, *l'équation a au moins 2K racines imaginaires.*

Exercices et notes.

1. Soit $V, V_1, \ldots, V_r$ une suite de fonctions jouissant des propriétés suivantes : 1° Elles sont continues dans l'intervalle (α, β) et la dernière ne change pas de signe (elle peut passer par zéro en gardant son signe); 2° Une valeur de x qui annule une fonction intermédiaire V_n, donne aux fonctions voisines V_{n-1}, V_{n+1} des signes contraires (sans les annuler).

Dans ces hypothèses, le nombre des racines réelles de $V = 0$, comprises entre α et β, est au moins égal à celui des variations que gagne ou perd la suite $V, V_1, \ldots, V_r$ dans le passage de $x = \alpha$ à $x = \beta$.

En effet, si x varie d'une manière continue, depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$, le nombre des variations de la suite (V) ne pourra être modifié qu'à l'instant où x atteindra et dépassera une valeur qui annulera V. Si le rapport $\frac{V}{V_1}$, en s'annulant dans l'intervalle (α, β), passe λ fois du négatif au positif, μ fois du positif au négatif et conserve ν fois son signe, la suite (V) gagne λ fois une variation et en perd μ fois une, etc.

Corollaires. — I. Dans l'application du théorème de Sturm à la suite $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, où V_1 est la dérivée de V, — V_2 le reste de la division de V par V_1, etc., le nombre des variations perdues par une partie V_i, V_{i+1}, . ., V_r de la suite dans le passage de $x = \alpha$ à $x = \beta$ est une limite inférieure du nombre des racines réelles de $V_i = 0$ comprises entre α et β.

Cette proposition se déduit immédiatement de la précédente.

II. Si l'équation $V_i = 0$ a p racines imaginaires, l'équation $V = 0$ en a au moins p (Darboux).

Soient μ, ν les nombres des variations perdues respectivement par les suites

$$V,\ V_1,\ \ldots,\ V_{i-1},\ V_i,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ V_r,$$
$$V_i,\ V_{i+1},\ \ldots,\ V_r,$$

dans le passage de $x = -\infty$ à $x = \infty$, et soit m le degré de V. On a $\mu < \nu + i$; d'où $m - \mu < m - i - \nu$. Or, μ étant le nombre des racines réelles de V, $m - \mu$ est celui des racines imaginaires; $m - i$ étant égal ou supérieur au degré de V_i, et ν étant égal ou inférieur au nombre des racines réelles de V_i, le nombre des racines imaginaires de V_i est égal ou inférieur à $m - i - \nu$, etc.

2. Soient $X = 0$ une équation qui a des racines multiples, X_1 la dérivée de X, V et V_1 les quotients de X et X_1 par leur p. g. c. d. X_r.

Si a est p fois racine de $X = 0$, p est égal à la valeur, pour $x = a$, du quotient de V_1 par la dérivée V' de V. (Sturm).

De $X = X_r V$, $X_1 = X_r V_1$ on déduit $\frac{V_1}{V} = \frac{X_1}{X}$. Si $X = (x-a)^p\varphi(x)$, on trouve facilement

$$\frac{V_1}{V} = \frac{X_1}{X} = \frac{p\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)}{(x-a)\varphi(x)},$$

d'où
$$V_1 : \frac{V}{x-a} = p + (x-a)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}. \qquad (1)$$

V étant de la forme $(x-a)f(x)$, on a $V' = f(x) + (x-a)f'(x)$ et la valeur de V', pour $x=a$, est égale à $f(a)$ ou égale à la valeur de $\frac{V}{x-a}$ pour $x=a$. Cela posé, faisons $x=a$ dans l'égalité (1), etc

Corollaire. — En égalant à zéro le p. g. c. d. de V et $V_1 - pV'$, on a l'équation dont les racines sont toutes celles de X, de l'ordre de multiplicité p, mais prises chacune une fois. (OSTROGRADSKI).

3. Soit $V=0$ une équation ayant toutes ses racines réelles et distinctes, et soit $V, V_1, V_2, .., V_r$ la suite de Sturm relative à V. 1° Les racines de V_i sont réelles et distinctes ; 2° elles séparent les racines de V_{i+1}.

En effet, si m est le degré de V, les fonctions de Sturm sont au nombre de $m+1$ et leurs premiers termes sont positifs (**205**). Par suite, dans le passage de $x=-\infty$ à $x=\infty$, la suite $V_i, V_{i+1}, .., V_m$ perd $m-i$ variations, ce qui exige que le rapport $\frac{V_i}{V_{i+1}}$ passe au moins $m-i$ fois du négatif au positif en s'annulant ; le degré de V_i étant aussi $m-i$, V_i n'a que des racines réelles et simples. Chaque fois que x passe par l'une de ces racines, le rapport $\frac{V_i}{V_{i+1}}$ passe du négatif au positif ; on en conclut, en raisonnant comme pour le théorème de Rolle, que les racines de V_i séparent celles de V_{i+1}.

4. En effectuant la division de 1 par $1+2ax+a^2$ suivant les puissances croissantes de a, on obtient un quotient

$$P_0 + P_1 a + P_2 a^2 + \ldots + P_n a^n + \ldots$$

dont les coefficients $P_0, P_1, P_2, ..$ sont des fonctions entières de x. Montrer que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

Au terme $P_n a_n$ du quotient de 1 par $1+2ax+a^2$ correspond un reste de la forme Ra^{n+1}. De l'identité

$$(1+2ax+a^2)(P_0 + P_1 a + P_2 a^2 + \ldots + P_n a^n) + Ra^{n+1} \equiv 1$$

on déduit

$$P_0 = 1, \quad P_1 + 2P_0 x = 0, \quad P_2 + 2P_1 x + P_0 = 0,$$
$$\ldots, \quad P_n + 2P_{n-1}x + P_{n-2} = 0.$$

On peut appliquer l'exercice 1 à la suite $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0$; les premiers termes de ces fonctions ayant des signes alternés, la suite gagne n variations quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

5. Appliquer le théorème de Sturm à l'équation

$$x^4 + x^3 - 15x^2 + 19x - 3 = 0.$$

6. Quelles sont les conditions de réalité des racines de l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0?$$

Réponse : $A < 0, \quad 2A(A^2 - 4C) + 9B^2 < 0,$

$$16(A^2 - 4C)^2 - 4AB^2(A^2 - 36C) - 27B^4 > 0.$$

CHAPITRE XIII.

ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

FORME GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

211. Abaissement des équations. — *Abaisser* le degré d'une équation, c'est la ramener à une ou plusieurs équations de degré moindre. Ainsi, les équations ayant des racines égales sont susceptibles d'abaissement (**185**); celles qui ne renferment que des puissances paires de x se ramènent à des équations de degré moitié moindre, etc.

212. Définition des équations réciproques. — *Une équation est dite réciproque lorsque, admettant une racine α, elle admet aussi la racine $\frac{1}{\alpha}$.*

Exemple. — L'équation

$$(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) = 0,$$

admet les racines

$$3, \quad \frac{1}{3}, \quad -2, \quad -\frac{1}{2}, \quad 1;$$

les inverses de ces racines,

$$\frac{1}{3}, \quad 3, \quad -\frac{1}{2}, \quad -2, \quad 1,$$

reproduisent les racines. Donc l'équation est réciproque.

Les racines d'une équation réciproque vont par couples, tels que α et $\frac{1}{\alpha}$, β et $\frac{1}{\beta}$, $\cdots$; toutefois, il peut y avoir la racine $x = 1$ ou $x = -1$, qui est sa propre inverse.

Soit $F(x) = 0$ une équation réciproque. La transformée en $\frac{1}{x}$ admet les mêmes racines ; par suite les coefficients des polynomes entiers $F(x)$ et $x^m F\left(\frac{1}{x}\right)$ sont proportionnels. Cette remarque permet de trouver la forme particulière des équations réciproques.

213. Forme générale des équations réciproques. — I. Considérons d'abord une équation de degré pair, par exemple

$$F(x) \equiv x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + G = 0 \qquad (1)$$

La transformée en $\frac{1}{x}$ est

$$\frac{1}{x^6} + \frac{A}{x^5} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x} + G = 0 ;$$

si l'on chasse les dénominateurs et qu'on divise par G, il vient

$$x^6 + \frac{E}{G} x^5 + \frac{D}{G} x^4 + \frac{C}{G} x^3 + \frac{B}{G} x^2 + \frac{A}{G} x + \frac{1}{G} = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) ayant les mêmes racines, on a

$$\frac{E}{G} = A, \quad \frac{D}{G} = B, \quad \frac{C}{G} = C, \quad \frac{B}{G} = D, \quad \frac{A}{G} = E, \quad \frac{1}{G} = G.$$

La dernière relation donne $G^2 = 1$, $G = \pm 1$; les autres se réduisent à

$$E = \pm A, \quad D = \pm B, \quad C = \pm C.$$

Suivant que l'on prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs, l'équation (1) prend l'une ou l'autre forme

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0, \qquad (3)$$
$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 \qquad Bx^2 - Ax - 1 = 0. \qquad (4)$$

Donc, *une équation de degré pair est réciproque, si les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires; dans le second cas, il n'y a pas de terme du milieu.*

Ce caractère est encore applicable lorsque le coefficient du premier terme de l'équation est différent de l'unité.

La première des formes trouvées est la *forme normale* des équations réciproques; toutes les équations réciproques s'y ramènent.

Pour réduire l'équation (4) à la forme normale, on réunit les termes équidistants des extrêmes :

$$(x^6 - 1) + Ax(x^4 - 1) + Bx^2(x^2 - 1) = 0;$$

supprimant le facteur $x^2 - 1$, on trouve

$$x^4 + x^2 + 1 + Ax(x^2 + 1) + Bx^2 = 0,$$

ou

$$x^4 + Ax^3 + (1 + B)x^2 + Ax + 1 = 0.$$

II. Considérons ensuite une équation réciproque de degré impair, par exemple

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{x}$ devient, après multiplication par x^5 et division par E,

$$x^5 + \frac{D}{E}x^4 + \frac{C}{E}x^3 + \frac{B}{E}x^2 + \frac{A}{E}x + \frac{1}{E} = 0.$$

Identifions les deux équations; nous aurons les égalités de condition

$$\frac{D}{E} = A, \quad \frac{C}{E} = B, \quad \frac{B}{E} = C, \quad \frac{A}{E} = D, \quad \frac{1}{E} = E.$$

La dernière donne $E = \pm 1$; les autres se réduisent à $D = \pm A$, $C = \pm B$. Donc, l'équation proposée a l'une des formes

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0, \tag{5}$$

$$x^4 + Ax^4 + Bx^3 - Bx^2 - Ax - 1 = 0. \tag{6}$$

Ainsi, *une équation de degré impair est réciproque, si les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires.*

Les équations (5) et (6) peuvent être écrites ainsi :

$$x^5 \pm 1 + Ax(x^3 \pm 1) + Bx^2(x \pm 1) = 0\,;$$

ou en écartant le facteur $x \pm 1$:

$$x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1 + Ax(x^2 \mp x + 1) + Bx^2 = 0,$$

ou $$x^4 + (A \mp 1)x^3 + (B \mp A + 1)x^2 + (A \mp 1)x + 1 = 0.$$

Donc les équations réciproques de degré impair se ramènent à la forme normale.

Abaissement de l'équation réciproque.

214. Soit une équation réciproque sous la forme normale

$$x^{2n} + A_1x^{2n-1} + A_2x^{2n-2} + \ldots + A_nx^n + \ldots + A_1x + 1 = 0 \qquad (7)$$

Prenons pour inconnue auxiliaire la somme de deux racines réciproques :

$$x + \frac{1}{x} = z\,; \qquad (8)$$

le nombre des valeurs de z est la moitié de celui des valeurs de x, c'est-à-dire n. Par conséquent, la transformée en z sera du degré n; on l'appelle *la réduite* ou *la résolvante de l'équation* (7).

Pour former cette réduite, divisons l'équation (7) par x^n et rapprochons les termes équidistants des extrêmes ; nous aurons

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + A_2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots + A_n = 0. \quad (9)$$

Si l'on fait

$$x^p + \frac{1}{x^p} = Z_p,$$

l'équation (9) prend la forme

$$Z_n + A_1Z_{n-1} + A_2Z_{n-2} + \ldots + A_n = 0. \qquad (10)$$

Pour calculer Z_p en fonction de z, multiplions, membre à membre, les égalités

$$x^p + \frac{1}{x^p} = Z_p, \quad x + \frac{1}{x} = z\,;$$

nous aurons

$$x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} = Z_p z,$$

ou
$$Z_{p+1} + Z_{p-1} = Z_p z\,;$$

donc
$$Z_{p+1} = Z_p z - Z_{p-1}.$$

Ainsi, *partant des valeurs initiales* $Z_0 = 2$, $Z_1 = z$, *on obtient les fonctions* Z_2, Z_3 ..., *par voie recurrente : chaque fonction est égale à la somme des deux précédentes, respectivement multipliées par* z *et par* -1.

En appliquant cette règle, on trouve

$$Z_2 = Z_1 z - Z_0 = z^2 - 2,\ Z_3 = Z_2 z - Z_1 = z^3 - 3z,\ Z_4 = z^4 - 4z^2 + 2 \ldots$$

Z_p étant de degré p en z, la réduite (10) est bien de degré n. Si on sait la résoudre, les valeurs de x résultent de $x + \frac{1}{x} = z$, où z est remplacé successivement par chaque racine de (10).

215. Exemple. — Résoudre l'équation

$$x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 16x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Divisons par x^3 et rapprochons les termes équidistants des extrêmes :

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 11\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0,$$

ou
$$Z_3 - 5Z_2 + 11Z_1 - 16 = 0.$$

On a trouvé $Z_2 = z^2 - 2$, $Z_3 = z^3 - 3z$; par suite la résolvante est

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0.$$

La méthode des racines commensurables donne $z = 3$; divisant par $z - 3$, on obtient $z^2 - 2z + 2 = 0$, d'où $z = 1 \pm \sqrt{-1}$.

L'égalité $x + \frac{1}{x} = z$ donne $x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$, et en remplaçant z par les valeurs trouvées :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-1} \pm \sqrt{\pm 2\sqrt{-1} - 4}}{2}.$$

Exercices et notes.

1. Résoudre l'équation

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x^3 + 6 = 0.$$

2. Trouver la forme générale des équations qui, admettant une racine α, admettent aussi la racine $-\frac{1}{\alpha}\cdot$

3. Démontrer que $Z_{p+q} + Z_{p-q} = Z_p Z_q$.

4. On peut généraliser la théorie des équations réciproques en appelant réciproque une équation qui, admettant la racine α, admet aussi la racine $\frac{k}{\alpha}$, k étant un membre donné. Trouver la forme générale d'une telle équation.

Si l'on divise les racines par $\sqrt{k}$, la transformée est une équation réciproque proprement dite.

5. Démontrer que toute équation du 4e degré,

$$A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0,$$

peut se ramener à une équation réciproque au moyen de la transformation

$$x = a + by.$$

6. Quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients d'une équation $F(x) = 0$ pour que, si α est une racine quelconque, $1 - \alpha$ soit également une racine ?

7. Résoudre l'équation

$$6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0.$$

8. Z_p étant le polynome en z défini ci-dessus (**214**), toutes les racines de Z_p sont réelles, distinctes et comprises entre -2 et 2.

On peut appliquer à la suite $Z_p, Z_{p-1}, \ldots, Z_1, Z_0$ l'exercice 1, page 193, en observant que $Z_i = zZ_{i-1} - Z_{i-2}$.

9. Les notations restant les mêmes, l'équation

$$U_p \equiv Z_p + Z_{p-1} + \ldots + Z_1 + Z_0 = 0$$

a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre -2 et $+2$.

Démontrer que $U_i = zU_{i-1} - U_{i-2}$, et appliquer l'exercice 1, p. 193.

10. Si l'on pose $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$, on a $Z_p = 2\cos p\varphi$.

11. Ramener au 4e degré l'équation

$$\frac{(1+x)^5}{1+x^5} + \frac{(1-x)^5}{1-x^5} = 2a.$$

12. Résoudre l'équation

$$[(x+2)^2 + x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2.$$

La substitution $x + 1 = y$ conduit à une équation réciproque.

La substitution $\frac{x+2}{x} = z$ conduit à une équation cubique ayant pour racine $z = 1$.

13. Démontrer que la forme la plus générale du polynome entier $F(x)$ satisfaisant aux conditions $F(1-x) = F(x)$, $x^m F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ est

$$(x^2-x)^{2p}(x^2-x+1)^q[A_0(x^2-x+1)^{3n} + A_1(x^2-x+1)^{3(n-1)}(x^2-x)^2$$
$$+ A_2(x^2-x+1)^{3(n-2)}(x^2-x)^4 + \ldots + A_n(x^2-x)^{2n}],$$

p, q, n désignant des entiers positifs et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des constantes quelconques. (*Concours général de Paris, 1874.*)

14. Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant leur somme et la somme de leurs carrés.

15. Résoudre complètement l'équation

$$x^{10} + x^8 + x^6 - 6x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

CHAPITRE XIV.

ÉQUATIONS BINOMES.

—

Formes normales des équations binomes.

216. Les équations binomes sont celles qui ont la forme

$$y^m - A = 0, \tag{1}$$

A étant une quantité donnée. Les solutions de l'équation (1) sont les différentes déterminations de $\sqrt[m]{A}$.

Soit a l'une de ces solutions. Si l'on remplace A par a^m et qu'on pose $y = ax$, l'équation (1) se ramène à $x^m - 1 = 0$. Par conséquent, les différentes valeurs de $\sqrt[m]{A}$ sont égales au nombre a multiplié successivement par les différentes racines m^{es} de 1.

Si A est positif, on peut prendre pour a la racine m^e arithmétique de A. Si A est négatif et que a représente la racine m^e

arithmétique de sa valeur absolue, on trouve, en posant encore $y = ax$, l'équation $x^m + 1 = 0$, de sorte que les valeurs de x sont les produits de a par les différentes valeurs de $\sqrt[m]{-1}$.

On peut donc distinguer quatre cas, représentés par

$$x^{2n+1} - 1 = 0,\quad x^{2n+1} + 1 = 0,\quad x^{2n} - 1 = 0,\quad x^{2n} + 1 = 0.$$

Le second se ramène au premier par le changement de x en $-x$. L'équation $x^{2n} - 1 = 0$ se décompose en deux autres

$$x^n - 1 = 0,\quad x^n + 1 = 0.$$

Si n est impair, ces nouvelles équations sont comprises dans les deux premiers cas; si n est pair, la seconde rentre dans le quatrième cas, et on peut continuer la décomposition de la première. On voit qu'il y a deux équations binomes distinctes, savoir

$$x^{2n+1} - 1 = 0,\quad x^{2n} + 1 = 0.$$

Propriétés des racines de l'unité.

217. Théorème. — *Toute puissance d'une racine m^e de l'unité est aussi racine m^e de l'unité.*

Soit α une racine m^e imaginaire de l'unité, de sorte que $\alpha^m = 1$. Nous aurons $(\alpha^m)^n = (\alpha^n)^m = 1$; donc α^n est une racine m^e de l'unité.

D'après cela, les termes de la suite

$$\alpha,\quad \alpha^2,\quad \alpha^3,\quad \ldots,\quad \alpha^{m-1},\quad \alpha^m,\quad \alpha^{m+1},\quad \ldots$$

sont des racines m^{es} de l'unité. La suite est périodique : la période comprend au plus m termes; car, de $\alpha^m = 1$, on déduit $\alpha^{m+1} = \alpha^m\alpha = \alpha$, $\alpha^{m+2} = \alpha^m\alpha^2 = \alpha^2$, etc.

218. Théorème. — *Les racines communes à deux équations*

$$x^m - 1 = 0,\quad x^n - 1 = 0, \tag{2}$$

sont également racines de l'équation

$$x^d - 1 = 0, \tag{3}$$

d *étant le p. g. c. d. des exposants* m *et* n.

Soit $m > n$; si q est le quotient et r le reste de la division de m par n et que α désigne une racine commune aux équations (2), on a

$$\alpha^m - 1 = \alpha^{nq+r} - 1 = 0, \quad \alpha^n - 1 = 0.$$

La première relation se réduit à $\alpha^r - 1 = 0$, car $\alpha^{nq+r} = (\alpha^n)^q \alpha^r$. Donc α est une racine commune aux équations

$$x^n - 1 = 0, \quad x^r - 1 = 0.$$

D'après cela, si $r, r', r'', \ldots d$ sont les restes des divisions que l'on effectue pour trouver le p. g. c. d. des nombres m et n, α est racine de chacune des équations

$$x^r - 1 = 0, \quad x^{r'} - 1 = 0, \quad x^{r''} - 1 = 0, \quad \ldots, \quad x^d - 1 = 0.$$

Donc toute racine commune aux équations (2) appartient à l'équation (3). Réciproquement, toute racine de l'équation (3) est aussi racine de chacune des équations (2).

Si m et n sont premiers entre eux, les équations (2) ont la seule racine commune $x = 1$.

219. Théorème. — *Si* m *est un nombre premier et* α *une racine imaginaire de l'équation* $x^m - 1 = 0$, *les* m *racines de cette équation sont*

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \ldots, \quad \alpha^m = 1.$$

En effet, chacun de ces termes est une racine (**217**). Ces racines sont distinctes ; car si l'on avait $\alpha^h = \alpha^{h'}$, on aurait, en divisant par $\alpha^{h'}$, $\alpha^{h-h'} = 1$; donc les équations $x^m - 1 = 0$, $x^{h-h'} - 1 = 0$ auraient une racine commune. Le plus grand commun diviseur de m et $h - h'$ étant 1, cette racine appartiendrait à l'équation $x - 1 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

220. Racines primitives. — On appelle *racine m^e primitive de l'unité* une racine imaginaire dont les m premières puissances reproduisent toutes les racines m^{es} de l'unité. D'après ce qu'on a démontré tantôt, toute racine imaginaire de l'équation $x^m - 1 = 0$ est une racine primitive lorsque l'exposant m est un nombre premier. Quand m est un nombre composé, certaines racines sont primitives, et les autres sont non primitives.

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE QUELQUES ÉQUATIONS BINOMES.

221. 1°
$$x^3 - 1 = 0.$$

Cette équation donne

$$(x-1)(x^2+x+1)=0;$$

d'où
$$x=1, \quad x=\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

On vérifie aisément que *les deux racines cubiques imaginaires de l'unité sont, chacune, le carré de l'autre;* nous les représenterons par θ et θ^2.

2°
$$x^4 + 1 = 0.$$

Pour obtenir les racines sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, écrivons

$$x^4+1+2x^2=2x^2, \quad \text{d'où} \quad x^2+1=\pm x\sqrt{2};$$

donc
$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm \sqrt{-1}).$$

3°
$$x^5 - 1 = 0.$$

Après suppression du facteur $x-1$ on obtient *l'équation réciproque*

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

que la substitution $x+\frac{1}{x}=z$ ramène à

$$z^2+z-1=0.$$

On en déduit

$$z=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5});$$

puis
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{-10\pm2\sqrt{5}}}{4}.$$

4°
$$x^8+1=0.$$

Opérant comme dans le deuxième exemple, on trouve suc-

cessivement

$$x^8 + 1 + 2x^4 = 2x^4, \quad x^4 + 1 = \pm x^2\sqrt{2},$$

$$x^4 + 1 + 2x^2 = (2 \pm \sqrt{2})x^2, \quad x^2 + 1 = \pm x\sqrt{2 \pm \sqrt{2}},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \pm \sqrt{-2 \pm \sqrt{2}}}{2}.$$

Les doubles signes *intérieurs* sont conjugués.

5° $$x^{12} + 1 = 0$$

A cause de $x^{12} = (x^4)^3$, le premier membre est divisible par $x^4 + 1$. Il reste donc à résoudre l'équation

$$x^8 - x^4 + 1 = 0.$$

Elle donne successivement

$$x^8 + 2x^4 + 1 = 3x^4, \quad x^4 + 1 = \pm x^2\sqrt{3},$$

$$x^4 + 1 + 2x^2 = x^2(2 \pm \sqrt{3}), \quad x^2 + 1 = \pm x\sqrt{2 \pm \sqrt{3}},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} \pm \sqrt{-2 \pm \sqrt{3}}}{2}.$$

Les doubles signes intérieurs sont conjugués.

6° $$x^{15} - 1 = 0.$$

A cause de $x^{15} = (x^3)^5 = (x^5)^3$, on a

$$x^{15} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1),$$
$$x^{15} - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Sept racines de l'équation proposée sont données par les équations

$$x - 1 = 0, \quad x^2 + x + 1 = 0, \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

On obtient les huit autres racines en égalant à zéro les quotients

$$\frac{x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}, \quad \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1},$$

égaux tous deux à

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

On a ainsi à résoudre une équation réciproque.

Résolution trigonométrique des équations binomes (*).

222. Pour résoudre l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

on pose $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ce qui donne

$$r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta) = 1.$$

Egalant les modules des deux membres, on trouve $r^m = 1$, $r = 1$. On a ensuite $m\theta = 2n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque. Les racines cherchées sont donc

$$x = \cos \frac{2n\pi}{m} + i \sin \frac{2n\pi}{m}. \tag{1}$$

223. **Remarques.** — I. En attribuant à n les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (m-1), \tag{2}$$

on obtient m valeurs distinctes pour x ; car, les arcs

$$0, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{2(m-1)\pi}{m}$$

étant moindres qu'une circonférence, deux quelconques d'entre eux, n'ont pas, à la fois, même sinus et même cosinus.

II. Si l'on donne à n d'autres valeurs, on retombe sur des racines déjà trouvées. Car, une telle valeur est $mq + n'$, n' étant l'un des nombres (2) ; l'arc correspondant de la formule (1),

$$\frac{2(mq + n')\pi}{m} = 2q\pi + \frac{2n'\pi}{m},$$

a les mêmes lignes trigonométriques que l'arc $\frac{2n'\pi}{m}$.

III. Les valeurs de x répondant à deux valeurs de n dont la somme est m, sont imaginaires conjuguées ; car les valeurs

(*) Nous reprenons et complétons les notions développées au § 25

correspondantes de l'arc $\frac{2n\pi}{m}$ ont pour somme 2π, de sorte que leurs cosinus sont égaux, et leurs sinus égaux et de signes contraires.

On obtient donc toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ en attribuant, dans la formule

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm i \sin\frac{2n\pi}{m},$$

à n les valeurs

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{m-1}{2},\quad \text{ou}\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{m}{2},$$

suivant que m est impair ou pair. Dans le premier cas, une valeur réelle de x correspond à $n = 0$; dans le second cas, on obtient deux valeurs réelles en faisant $n = 0$ et $n = \frac{m}{2}$.

IV. La somme des racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ est nulle ; donc

$$1 + \cos\frac{2\pi}{m} + \cos\frac{4\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{2(m-1)\pi}{m} = 0.$$

$$\sin\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{4\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{2(m-1)\pi}{m} = 0.$$

V. La valeur (1) est une racine primitive si n est premier avec m ; en particulier, $\cos\frac{2\pi}{m} + i \sin\frac{2\pi}{m}$ est une racine primitive.

224. Considérons maintenant l'équation

$$x^m + 1 = 0,$$

m étant pair. Si l'on pose encore $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on a

$$r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta) = -1,$$

d'où résulte d'abord $r^m = 1$, $r = 1$; ensuite,

$$\cos m\theta = -1,\quad m\theta = 2(n+1)\pi.$$

Les valeurs cherchées de x sont donc

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + i \sin\frac{(2n+1)\pi}{m}.$$

Cette formule donne m racines distinctes, si l'on fait

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (m-1);$$

les autres valeurs de n reproduisent les mêmes racines; enfin, deux valeurs de n dont la somme est $m-1$ donnent pour x des imaginaires conjuguées.

Facteurs trinomes de $x^m \pm 1$.

225. Si m est impair, les racines imaginaires de l'équation $x^m - 1 = 0$ sont donnés par la formule

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm i \sin\frac{2n\pi}{m},$$

où n reçoit les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ · Décomposons $x^m - 1$ en facteurs du premier degré, puis effectuons le produit de deux facteurs conjugués ; nous aurons

$$x^m - 1 = (x-1)\left[x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right]\left[x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right]\ldots$$
$$\ldots\left[x^2 - 2x\cos\frac{(m-1)\pi}{m} + 1\right].$$

Semblablement, si m est pair,

$$x^m + 1 = \left[x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right]\left[x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right]\ldots$$
$$\ldots\left[x^2 - 2x\cos\frac{(m-1)\pi}{m} + 1\right].$$

Exercices et notes.

1. Résolution algébrique des équations

$$x^6 - 1 = 0, \quad x^6 + 1 = 0, \quad x^{10} - 1 = 0.$$

2. Résolution trigonométrique des équations

$$x^7 - 1 = 0, \quad x^9 + 1 = 0, \quad x^{12} + 1 = 0.$$

3. Ramener l'équation $x^{21} - 1 = 0$ à des équations de degrés inférieurs.
4. Résoudre complètement l'équation $x^{2m} + px^m + q = 0$.

5. Partageons une circonférence en $2m$ parties égales, aux points A_0, A_1, A_2, ..., A_{2m-1}; joignons le centre O à tous les points de division et menons une ligne OP faisant l'angle $\frac{a}{m}$ avec le premier rayon OA_0; enfin joignons P aux points A_0, A_1, ...

Si $OA_0 = 1$ et $OP = x$, on a

$$x^{2m} - 2x^m \cos a + 1 = (PA_0 . PA_2 . PA_4 \dots PA_{2m-2})^2,$$
$$x^{2m} + 2x^m \cos a + 1 = (PA_1 . PA_3 . PA_5 \dots PA_{2m-1})^2.$$

(MOIVRE.)

Si $a = 0$, on a le théorème de Côtes, exprimé par les égalités

$$x^m - 1 = \pm PA_0 . PA_2 \dots PA_{2m-2},$$
$$x^m + 1 = PA_1 . PA_3 \dots PA_{2m-1}.$$

6. Si m et n sont premiers entre eux, on obtient toutes les racines de $x^{mn} - 1 = 0$ en multipliant toutes les racines de $x^m - 1 = 0$ par toutes les racines de $x^n - 1 = 0$.

CHAPITRE XV.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Équation du troisième degré.

226. Méthode de Hudde. — En faisant disparaître le terme en x^2 d'une équation du 3e degré (**136**), on la réduit à la forme

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

Posons $x = y + z$, y et z étant deux inconnues auxiliaires: l'équation devient

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y + z) + q = 0,$$

ou

$$(y^3 + z^3 + q) + (y + z)(3yz + p) = 0.$$

Elle est vérifiée par les solutions du système

$$y^3 + z^3 + q = 0, \quad 3yz + p = 0,$$

ou

$$y^3 + z^3 = -q, \quad yz = -\frac{p}{3}.$$

Prenons pour inconnues y^3 et z^3 ; comme elles ont pour somme $-q$, pour produit $-\left(\frac{p}{3}\right)^3$, elles sont les racines de l'équation

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Par conséquent

$$u = \frac{y^3}{z^3} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

et la valeur cherchée de x est

$$x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (2)$$

227. Formule de Cardan. — Ce résultat est connu sous le nom de formule de Cardan, bien qu'il soit dû à Tartaglia.

L'inconnue auxiliaire y a trois valeurs, que nous représentons par R_1, $R_1\theta$, $R_1\theta^2$, θ désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. De même, z a trois valeurs R_2, $R_2\theta$, $R_2\theta^2$. Comme on doit avoir $yz = -\frac{p}{3}$, on associe des valeurs de y et z ayant un produit réel. Si R_1 et R_2 vérifient cette condition, de manière que $R_1 R_2 = -\frac{p}{3}$, les valeurs de x sont

$$x_1 = R_1 + R_2, \quad x_2 = R_1\theta + R_2\theta^2, \quad x_3 = R_1\theta^2 + R_2\theta.$$

La formule (2) envisagée dans toute sa généralité comporte neuf valeurs. L'introduction de six valeurs étrangères à l'équation (1) est due à ce qu'on a remplacé l'équation $yz = -\frac{p}{3}$ par l'équation plus générale $y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27}$; celle-ci équivaut aux trois suivantes :

$$yz = -\frac{p}{3}, \quad yz = -\frac{p\theta}{3}, \quad yz = -\frac{p\theta^2}{3}.$$

On obtiendrait les deux dernières si, dans l'équation (1), p était remplacé par $p\theta$ ou $p\theta^2$; donc les neuf valeurs de x résolvent les trois équations

$$x^3 + px + q = 0, \quad x^3 + p\theta x + q = 0, \quad x^3 + p\theta^2 x + q = 0,$$

contenues dans l'équation unique du 9e degré

$$(x^3 + q)^3 = -p^3x^3.$$

On ne conserve que les solutions de l'équation (1) en écrivant

$$x = y - \frac{p}{3y}, \quad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

et en sous-entendant que y est remplacé successivement par les trois déterminations de la racine cubique de $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

228. Application. — $x^3 + 6x - 7 = 0.$

La formule (2) donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}} = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}.$$

Les valeurs de $\sqrt[3]{8}$ sont 2, 2θ, $2\theta^2$; celles de $\sqrt[3]{1}$ sont 1, θ, θ^2. Comme on doit associer deux valeurs des radicaux cubiques dont le produit soit réel, les racines cherchées sont

$$x_1 = 2 - 1 = 1,$$
$$x_2 = 2\theta - \theta^2 = \frac{1}{2}(-1 + 3\sqrt{-3}).$$
$$x_3 = 2\theta^2 - \theta = -\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{-3}).$$

229. Discussion. — Nous distinguons trois cas :

1° $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Dans la formule (2), les radicaux cubiques portant sur des quantités réelles, nous pouvons prendre pour R_1, R_2 leurs valeurs arithmétiques. Les racines de (1) sont alors

$$x_1 = R_1 + R_2,$$
$$x_2 = R_1\theta + R_2\theta^2 = -\frac{1}{2}(R_1 + R_2) + \frac{1}{2}(R_1 - R_2)\sqrt{-3},$$
$$x_3 = R_1\theta + R_2\theta^2 = -\frac{1}{2}(R_1 + R_2) - \frac{1}{2}(R_1 - R_2)\sqrt{-3};$$

la première est réelle, les autres sont imaginaires.

2° $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. On a $R_1 = R_2$; par suite

$$x_1 = 2R_1, \quad x_2 = x_3 = -R_1.$$

L'équation a donc deux racines égales.

3° $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Les radicaux cubiques portant sur des quantités imaginaires, R_1 et R_2 sont imaginaires. L'équation paraît donc avoir trois racines imaginaires. Mais nous avons vu (**206**) que les trois racines sont réelles dans l'hypothèse considérée.

On en conclut que les imaginaires se détruisent dans les valeurs de x_1, x_2, x_3. Cependant l'algèbre est impuissante à ramener les expressions de x_1, x_2, x_3 à la forme réelle ; c'est pourquoi le cas qui nous occupe, est appelé *cas irréductible*. Nous allons montrer comment, au moyen des fonctions circulaires, on peut obtenir les expressions réelles des racines.

Cas irréductible.

230. Première solution. — Lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, posons

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = r(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta);$$

il en résulte

$$r\cos\theta = -\frac{q}{2}, \quad r\sin\theta = \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}. \tag{3}$$

Faisant la somme des carrés on obtient

$$r = +\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

valeur réelle, car l'inégalité $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ exige $p < 0$. Les égalités (3) donnent ensuite pour θ une valeur unique α comprise entre 0 et 2π.

Les radicaux cubiques qui entrent dans la formule (2) ont pour expression (**25**)

$$\sqrt[3]{r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)} = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2n\pi+\alpha}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi+\alpha}{3}\right),$$

$$\sqrt[3]{r(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)} = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2n\pi+\alpha}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi+\alpha}{3}\right).$$

Les trois déterminations de chaque radical correspondent aux valeurs $n = 0, 1, 2$; on doit prendre la même valeur de n dans les deux radicaux, afin que leur produit soit réel. Les racines de l'équation proposée sont donc

$$2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\quad 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha+2\pi}{3},\quad 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\alpha+4\pi}{3},$$

231. Seconde solution. — On a l'identité

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3}.$$

Si $\sin\alpha$ est donné, cette égalité peut servir à déterminer $\sin\frac{\alpha}{3}$; en posant $\sin\frac{\alpha}{3} = y$, on aura à résoudre l'équation

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\sin\alpha = 0. \tag{4}$$

Les trois racines de cette équation sont réelles. En effet, les arcs qui ont un même sinus sont compris dans les expressions $2n\pi + \alpha$, $(2n+1)\pi - \alpha$, n étant un nombre entier quelconque. Comme l'équation (4) dépend de $\sin\alpha$ et non de l'arc α, elle donne les sinus de tous les arcs de la forme $\frac{2n\pi+\alpha}{3}$ ou $\frac{(2n+1)\pi-\alpha}{3}$; si l'on remplace n successivement par $3n'$, $3n'+1$, $3n'+2$, on trouve que l'inconnue y a trois valeurs différentes représentées par

$$\sin\frac{\alpha}{3},\quad \sin\frac{2\pi+\alpha}{3},\quad \sin\frac{4\pi+\alpha}{3}. \tag{5}$$

Telles sont les racines de l'équation (4).

Mais ces racines s'obtiennent aussi au moyen des tables trigonométriques, remarque qui conduit à une résolution du cas irréductible.

Multiplions les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ par une indéterminée k ; nous aurons l'équation

$$y^3 + pk^2y + qk^3 = 0,$$

que l'on peut identifier avec l'équation (4). Les conditions

$$pk^2 = -\frac{3}{4}, \quad qk^3 = \frac{1}{4}\sin\alpha,$$

donnent

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{p}}, \quad \sin\alpha = \frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}.$$

On vérifie facilement que dans le cas irréductible, cette valeur de $\sin\alpha$ est comprise entre — 1 et 1. Les racines cherchées sont donc

$$\frac{1}{k}\sin\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{1}{k}\sin\frac{2\pi + \alpha}{3}, \quad \frac{1}{k}\sin\frac{4\pi + \alpha}{3}.$$

232. Application. — Partager un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

Prenons le rayon pour unité, et soit x la distance du centre au plan cherché. Le segment compris entre la base de l'hémisphère et le plan parallèle doit être égal au quart de la sphère ; de là, l'équation

$$\frac{1}{2}\pi x(1 + 1 - x^2) + \frac{1}{6}\pi x^3 = \frac{1}{3}\pi,$$

ou

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \quad (5)$$

Elle rentre dans le cas irréductible, car

$$p = -3, \quad q = 1, \quad \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -1 + \frac{1}{4} < 0$$

Si l'on applique la formule de Cardan, on trouve

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}.$$

Posons (**230**)

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = r(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta),$$

alors

$$r\cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad r\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

d'où

$$r = 1, \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

On peut donc prendre $\theta = 120^\circ$, $120^\circ + 360^\circ$, $120^\circ + 720^\circ$, et la formule de Cardan donne pour x les valeurs

$$2\cos 40^\circ, \quad 2\cos 160^\circ = -2\cos 20^\circ, \; 2\cos 280^\circ = 2\cos 80^\circ.$$

En se servant des tables de logarithmes, on trouve

$$x_1 = 1{,}532\ldots, \quad x^2 = -1{,}8793\ldots, \quad x_3 = 0{,}3472\ldots$$

La valeur x_3 répond seule au problème de géométrie.

Si l'on multiplie les racines de (6) par une indéterminée k (**231**) et qu'on identifie la nouvelle équation avec l'équation (4), il vient

$$3k^2 = \frac{3}{4}, \quad k^3 = \frac{1}{4}\sin\alpha;$$

d'où

$$k = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad 390^\circ, \quad 750^\circ.$$

Les racines cherchées sont donc

$$x_1 = \frac{y_1}{k} = 2\sin 10^\circ, x_2 = 2\sin 130^\circ = 2\sin 50^\circ, x^3 = 2\sin 250^\circ = -2\sin 70^\circ;$$

elles se ramènent aux expressions trouvées ci-dessus.

Équation du quatrième degré.

233. Méthode de Descartes. — Toute équation du quatrième degré peut être ramenée à la forme (**136**)

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0. \qquad (7)$$

Si l'on parvient à mettre le premier membre sous la forme d'un produit de deux facteurs du second degré,

$$(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q),$$

il suffit d'égaler à zéro chacun de ces facteurs et de résoudre les équations ainsi obtenues. Identifions ce produit avec le premier membre de (7) ; le terme en x^3 ayant un coefficient nul, on a $p + p' = 0$. Nous posons donc

$$(x^2 + px + q)(x^2 - px + q') \equiv x^4 + Ax^2 + Bx + C. \qquad (8)$$

On trouve facilement les égalités de condition

$$q + q' - p^2 = A, \quad (q' - q)p = B, \quad qq' = C.$$

Les deux premières donnent

$$2q = p^2 + A - \frac{B}{p}, \quad 2q' = p^2 + A + \frac{B}{p}; \qquad (9)$$

substituant ces valeurs dans la troisième, on obtient

$$(p^2 + A)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4C,$$

ou $$p^6 + 2Ap^4 + (A^2 - 4C)p^2 - B^2 = 0,$$

et en posant $p^2 = z$,

$$z^3 + 2Az^2 + (A^2 - 4C)z - B^2 = 0. \qquad (10)$$

Telle est la *réduite* ou la *résolvante* de l'équation (7). Elle admet au moins une racine réelle de signe contraire à celui du dernier terme ; donc p a au moins une valeur réelle.

234. Application. $x^4 - 10x^2 - 9x - 2 = 0$.

On trouve

$$q + q' - p^2 = -10, \quad q' - q = -\frac{9}{p}, \quad qq' = 2;$$

d'où $$2q' = p^2 - 10 - \frac{9}{p}, \quad 2q = p^2 - 10 + \frac{9}{p}.$$

La résolvante est donc

$$\left(p^2 - 10 - \frac{9}{p}\right)\left(p^2 - 10 + \frac{9}{p}\right) = 8,$$

ou $$z^3 - 20z^2 + 108z - 81 = 0.$$

On trouve facilement la racine $z = 9$. Prenons $p = 3$: alors

$$2q' = -4, \quad 2q = 2.$$

L'équation proposée est ramenée aux deux équations du second degré

$$x^2 - 3x - 2 = 0, \quad x^2 + 3x + 1 = 0;$$

les racines cherchées sont donc

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

235. Remarques. — I. On voit facilement pourquoi la résolvante est du troisième degré. En effet, soient α, β, γ, δ les racines de l'équation proposée ; comme l'équation $x^2 + px + q = 0$ doit donner deux de ces racines, p peut avoir l'une des six valeurs

$$-(\alpha+\beta), \quad -(\alpha+\gamma), \quad -(\alpha+\delta),$$
$$-(\gamma+\delta), \quad -(\beta+\delta), \quad -(\beta+\gamma).$$

A cause de $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$, ces valeurs sont, deux à deux, égales et de signes contraires ; donc l'équation en p est du 6e degré et ne renferme que des puissances paires de p.

II. On peut exprimer α, β, γ, δ en fonction des racines z_1, z_2, z_3 de la résolvante (10). En effet, supposons

$$\alpha+\beta = \pm\sqrt{z_1}, \quad \alpha+\gamma = \pm\sqrt{z_2}, \quad \alpha+\delta = \pm\sqrt{z_3}; \qquad (11)$$

ajoutant ces égalités et tenant compte de la relation $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$, on obtient

$$2\alpha = \pm\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}. \qquad (12)$$

Comme α est l'une quelconque des racines, la formule (12) doit donner les quatre racines, pourvu que l'on choisisse convenablement les signes des radicaux. Or, le dernier terme de la résolvante est $-B^2$; donc cette résolvante convient aussi à l'équation $x^4 + Ax^2 - Bx + C = 0$ (*).

Pour voir quels sont les signes à attribuer aux radicaux dans les égalités (11), cherchons le produit $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)$; en effectuant les calculs, on trouve

$$\alpha^3 + \alpha^2(\beta+\gamma+\delta) + \alpha(\beta\gamma+\gamma\delta+\beta\delta) + \beta\gamma\delta.$$

(*) C'est la transformée en $-x$, qui admet évidemment les mêmes valeurs de p et dont les quatre racines sont également comprises dans la formule (12).

A cause de $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, ce produit se réduit à

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta = -\mathrm{B}.$$

Donc, si B est positif dans l'équation (7), on prend, dans les égalités (11), l'une des combinaisons

$$- - -, \quad - + +, \quad + - +, \quad + + -,$$

et d'après l'équation (12), les racines de (7) seront

$$-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},$$
$$+\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}.$$

Si B est négatif, les racines seront

$$+\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad -\sqrt{\,}_1 - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Ces développements supposent les valeurs de z_1, z_2, z_3 positives.

Exercices et notes.

1. L'équation $x^3 + px + q = 0$ a une seule racine de signe contraire à celui de son dernier terme. Pour calculer cette racine, on peut se servir de la formule $x = \frac{-q}{x^2 + p}$. Si a est un nombre de même signe que $-q$ et tel, que $a^2 + p$ soit positif, la racine est comprise entre a et $a_1 = \frac{-q}{a^2 + p}$. Soit b un nombre intermédiaire entre a et a_1 ; la racine est comprise entre b et $b_1 = -\frac{q}{b^2 + p}$. Et ainsi de suite.

2. Soit $x^3 - px - q = 0$ une équation rentrant dans le cas irréductible. Deux des racines sont les limites des expressions indéfinies.

$$\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{+p.\,.\,.}}}}} \qquad -\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - .\,.\,.}}}}}$$

La troisième a pour valeurs de plus en plus approchées :

$$x_1 = -\frac{q}{p}, \quad x_2 = -\frac{q}{p} + \frac{x_1^3}{p}, \quad x_3 = -\frac{q}{p} + \frac{x_2^3}{p}.$$

3. Résoudre l'équation

$$A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + A_3 = 0, \tag{1}$$

en la ramenant à la forme

$$\alpha(x-\beta)^3+\alpha'(x-\beta')^3=0.$$

On trouve les conditions

$$\alpha+\alpha'=A_0,\quad \alpha\beta+\alpha'\beta'=-A_1,\quad \alpha\beta^2+\alpha'\beta'^2=A_2,\quad \alpha\beta^3+\alpha'\beta'^3=-A_3.$$

Eliminant α et α' entre trois de ces équations, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & A_0 \\ \beta & \beta' & -A_1 \\ \beta^2 & \beta'^2 & A_2 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -A_1 \\ \beta & \beta' & A_2 \\ \beta^2 & \beta'^2 & -A_3 \end{vmatrix}=0,$$

ou après suppression du facteur $\beta-\beta'$,

$$A_0\beta\beta'+A_1(\beta+\beta')+A_2=0,\quad A_1\beta\beta'+A_2(\beta+\beta')+A_3=0. \qquad (2)$$

Ces égalités font connaître $\beta+\beta'$ et $\beta\beta'$; on peut donc former l'équation du second degré ayant pour racines β et β' :

$$x^2-x(\beta+\beta')+\beta\beta'=0. \qquad (3)$$

Si l'on élimine $\beta\beta'$, $\beta+\beta'$ entre les égalités (2) et (3), on trouve

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix}=0,$$

équation qui peut remplacer (3). En ajoutant à la 3e colonne la 2e multipliée par x, et à la 2e colonne la 1re multipliée par x, on obtient

$$\begin{vmatrix} A_0x+A_1 & A_1x+A_2 \\ A_1x+A_2 & A_2x+A_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Si l'on introduit la variable d'homogénéité y, le dernier déterminant est

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix},$$

$F(x, y)$ désignant $A_0x^3+3A_1x^2y+3A_2xy^2+A_3y^3$; on l'appelle le *hessien* de $F(x, y)$.

4. Résoudre l'équation du troisième degré par les fonctions symétriques.
(Méthode de Lagrange.)

Soient x_1, x_2, x_3 les racines. La fonction $x_1+Ax_2+Bx_3$ prend six valeurs quand on y permute x_1, x_2, x_3 de toutes les façons. Soient

$$u=x_1+Ax_2+Bx_3,\quad u_1=x_2+Ax_3+Bx_1,\quad u_2=x_3+Ax_1+Bx_2,$$
$$v=x_1+Ax_3+Bx_2,\quad v_1=x_2+Ax_1+Bx_3,\quad v_2=x_3+Ax_2+Bx_1$$

ces valeurs. Elles dépendent d'une équation du 6e degré, qu'on sait résoudre quand elle est $z^6-mz^3+n=0$. Les racines d'une telle équation étant de

de la forme λ, $\lambda\theta$, $\lambda\theta^2$, μ, $\mu\theta$, $\mu\theta^2$, on est conduit à choisir A et B de manière que $u_1 = u\theta$, $u_2 = u\theta^2$; on trouve $A = \theta^2$, $B = \theta$. Pour ces valeurs, si l'on suppose $\mu = v$, on a $v_2 = v\theta$, $v_1 = v\theta^2$. Les valeurs de m et n sont

$$m = u^3 + v^3 = (x_1 + \theta^2 x_2 + \theta x_3)^3 + (x_1 + \theta^2 x_3 + \theta x_2)^3,$$
$$n = u^3 v^3 = (x_1 + \theta^2 x_2 + \theta x_3)^3 (x_1 + \theta^2 x_3 + \theta x_2)^3.$$

En tenant compte des égalités $\theta^3 = 1$, $\theta + 1 = -\theta^2$, on trouve

$$m = 2\Sigma^3 x_1 - 9\Sigma x_1 \Sigma x_1 x_2 + 27 x_1 x_2 x_3, \quad n = (\Sigma^2 x_1 - 3\Sigma x_1 x_2)^3.$$

Finalement x_1, x_2, x_3 se déduisent des équations

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3A_1}{A_0}, \; x_1 + \theta^2 x_2 + \theta x_3 = u, \; x_1 + \theta x_2 + \theta^2 x_3 = v.$$

5. Résoudre, par la trigonométrie, l'équation $x^3 + px + q = 0$, dans le cas où une seule racine est réelle.

Si $p < 0$, on pose $x = \lambda(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi)$, λ et φ étant deux indéterminées. De là, l'équation

$$x^3 = \lambda^3(\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cotg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi)$$

ou

$$x^3 - 3\lambda^2 x - \lambda^3(\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cotg}^3\varphi) = 0,$$

qu'on peut identifier avec la proposée. Les racines imaginaires sont

$$x = \lambda(\theta\operatorname{tg}\varphi + \theta^2\operatorname{cotg}\varphi), \quad x = \lambda(\theta^2\operatorname{tg}\varphi + \theta\operatorname{cotg}\varphi).$$

Si $p > 0$, on fait $x = \lambda(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi)$.

6. Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les racines de l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

les racines de la résolvante de Descartes (**233**) ont pour expressions

$$\pm\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \quad \pm\frac{1}{2}(x_1 + x_3 - x_2 - x_4),$$
$$\pm\frac{1}{2}(x_1 + x_4 - x_2 - x_3).$$

Car, on ramène l'équation à la forme $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$ en diminuant les racines de $\frac{1}{4}\Sigma x_1$; une racine de la résolvante est, par exemple,

$$-(x_1 - \frac{1}{4}\Sigma x_1) - (x_2 - \frac{1}{4}\Sigma x_1), \quad \text{etc.}$$

7. Résoudre l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \tag{1}$$

par extraction de racine carrée. (Méthode de Ferrari.)

Cette équation, écrite sous la forme

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rx - s, \qquad (2)$$

est résoluble immédiatement si $r^2 = s(4q - p^2)$. Dans le cas général, on ajoute aux deux membres $2\left(x^2 + \frac{p}{2}x\right)y + y^2$, ce qui donne

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + y\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)x^2 + (py - r)x + y^2 - s. \qquad (3)$$

Déterminons y par la condition que le second membre de (3) soit un carré parfait; on aura une résolvante du 3e degré en y.

Remarque. — L'équation (3) se ramène à

$$x^2 + \frac{p}{2}x + y = \pm\left\{x\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y} + \frac{py - r}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y}}\right\}. \qquad (4)$$

Soient x_1 et x_2 ou x_3 et x_4 les racines de (4) suivant que l'on prend le signe $+$ ou le signe $-$ devant le second membre; ce sont les racines de (1). On aura

$$x_1x_2 = y - \frac{py - r}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y}}, \quad x_3x_4 = y + \frac{py - r}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 2y}};$$

d'où $y = \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4)$. Cette valeur de y prend trois valeurs distinctes si l'on y permute x_1, x_2, x_3, x_4 de toutes les façons; donc y est donné par une équation du 3e degré.

8. Résoudre l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

par les fonctions symétriques. (Méthode de Lagrange.)

1° On forme l'équation auxiliaire qui a pour racines

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad y_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad y_3 = x_1x_4 + x_2x_3;$$

les quantités $y_1 + y_2 + y_3$, $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1$, $y_1y_2y_3$ se déterminent aisément en fonction de p, q, r, s.

Il suffit de connaître une seule racine y_1 de la résolvante. Car les produits x_1x_2, x_3x_4 résultent de

$$x_1x_2 \cdot x_3x_4 = s, \quad x_1x_2 + x_3x_4 = y_1;$$

on déduit ensuite les sommes $x_1 + x_2$, $x_3 + x_4$ des égalités

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -p, \quad x_3x_4(x_1 + x_2) + x_1x_2(x_3 + x_4) = -q.$$

2° On forme l'équation auxiliaire qui a pour racines

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \quad (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2, \quad (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2.$$

9. Résoudre l'équation

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0$$

au moyen de la substitution $x = y + z$. (Méthode de Francœur.)

Remplaçons x par $y + z$ et ordonnons le résultat par rapport à z :

$$z^4 + 4yz^3 + (6y^2 + q)z^2 + (4y_3 + 2qy + r)z$$
$$+ y^4 + qy^2 + ry + s = 0. \quad (1)$$

On obtient une équation bicarrée en z, en égalant à zéro la somme des termes en z^3 et z, ce qui donne

$$4yz^2 + 4y^3 + 2qy + r = 0.$$

Tirant de là z^2 pour substituer la valeur dans l'équation (1), on aura

$$u^3 + \frac{q}{2}u^2 + \left(\frac{q^2}{16} - \frac{s}{4}\right)u - \frac{r^2}{64} = 0,$$

u remplaçant y^2. Soient a^2, b^2, c^2 les racines de cette résolvante; alors $a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{q}{2}$, $abc = -\frac{r}{8}$. La valeur de z^2 en y, si l'on remplace q par $-2(a^2 + b^2 + c^2)$, r par $-8abc$, y par $\pm a$, donne $z = \pm (b + c)$. On en conclut que les valeurs de x sont

$$a + b + c, \quad a - b - c, \quad -a + b - c, \quad -a - b + c.$$

10. Résoudre l'équation

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0$$

au moyen de la substitution $x = a + b + c$. (Méthode d'Euler.)

On a $x = \Sigma a$, $x^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$ ou $x^2 - \Sigma a^2 = 2\Sigma ab$ et en élevant au carré

$$x^4 - 2x^2\Sigma a^2 + \Sigma a^4 - 2\Sigma a^2b^2 - 8abc\Sigma a = 0,$$

ou
$$x^4 - 2x^2\Sigma a^2 - 8abcx + \Sigma^2 a^2 - 4\Sigma a^2b^2 = 0.$$

Identifions cette équation avec la proposée ; il vient

$$\Sigma a^2 = -\frac{1}{2}q, \quad abc = -\frac{1}{8}r, \quad \Sigma^2 a^2 - 4\Sigma a^2b^2 = s.$$

Donc a^2, b^2, c^2 sont racines de

$$z^3 + \frac{1}{2}qz^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}q^2 - s\right)z - \frac{1}{64}r^2 = 0.$$

Soient z_1, z_2, z_3, les racines de cette équation : on aura

$$a = \pm\sqrt{z_1},\quad b = \pm\sqrt{z_2},\quad c = \pm\sqrt{z_3},\quad x = a + b + c,$$

les signes des radicaux devant être combinés de manière que l'on ait

$$abc = -\frac{1}{8}r.$$

Si a', b', c' désignent trois valeurs des radicaux pris avec ces signes, les quatre valeurs de x seront

$$a' + b' + c',\quad a' - b' - c',\quad -a' + b' - c',\quad -a' - b' + c'.$$

11. Résoudre l'équation du 4e degré en la ramenant à une équation réciproque.

On pose $x = m + ny$ et l'on exprime que l'équation transformée en y est réciproque. En éliminant n entre les deux égalités de condition, on parvient à une équation du troisième degré en m (*).

12. Résoudre l'équation

$$A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + A_3 = 0,$$

lorsque $A_1^2 = A_0A_2$ (ou $A_2^2 = A_1A_3$).

Multiplions l'équation par A_0^2 et remplaçons A_0A_2 par A_1^2 ; on pourra écrire

$$(A_0x + A_1)^3 = A_1^3 - A_0^2A_3.$$

Le cas général se ramène au précédent : on remplace x par $y + \lambda$ et l'on dispose de λ de manière que la nouvelle équation rentre dans le cas particulier considéré. (Méthode de Twining.)

13. Pour résoudre l'équation

$$A_0x^4 + 4A_1x^3 + 6A_2x^2 + 4A_3x + A_4 = 0,$$

on écrit

$$\lambda^2x^4 + 4A_1x^3 + 4A_3x = (\lambda^2 - A_0)x^4 - 6A_2x^2 - A_4.$$

Les trois termes du premier membre font partie du carré de

$$\lambda x^2 + \frac{2A_1}{\lambda}x + \frac{\lambda A_3}{A_1};$$

ajoutons aux deux membres les termes nécessaires pour avoir dans le premier membre un carré parfait, et choisissons λ de manière que le second membre soit également un carré, etc. (Méthode de Twining.)

14. Résoudre l'équation $x^3 \pm 3b^2x = 2c^3$ en posant $x = \frac{y^2 \mp b^2}{y}$. (Méthode de Viète.)

(*) Pour une interprétation géométrique de cette méthode, voir *Mathesis*, t. I, p. 199 et t. II, p. 181.

CHAPITRE XVI.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES.

—

236. On sait déterminer les racines commensurables d'une équation à coefficients rationnels (**158, 162**) et décomposer une équation qui a des racines égales en plusieurs autres donnant les racines d'un même degré de multiplicité (**184**). Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que l'équation donnée n'a aucune racine commensurable ni aucune racine multiple ; ses racines seront donc incommensurables ou imaginaires.

La recherche des racines incommensurables se décompose en deux parties : 1° la séparation des racines ; 2° le calcul des racines avec une approximation donnée.

Séparation des racines.

237. Emploi du théorème de Sturm. — Lorsqu'on sait trouver les racines de l'équation dérivée $F'(x) = 0$, le théorème de Rolle donne une méthode pour séparer les racines de $F(x) = 0$ (**197**).

Le théorème de Sturm permet également de séparer les racines ; mais les calculs sont pénibles. On remplace, dans la suite de Sturm, x par $-\infty$, 0, $+\infty$; le nombre des variations de cette suite fait connaître le nombre des racines négatives et celui des racines positives de l'équation proposée. Pour déterminer les racines positives, substituons à x, dans la suite de Sturm, les nombres 0, 1, 10, 100, ... jusqu'à ce qu'on atteigne la limite supérieure des racines positives ; nous saurons ainsi combien l'équation a de racines dans les intervalles (0, 1), (1, 10), (10, 100), ... Substituons ensuite à x les nombres entiers consécutifs, compris dans les intervalles utiles. Si les nombres a et $a+1$ comprennent une ou plusieurs racines, remplaçons, dans la suite de Sturm, x par a, $a+\frac{1}{10}$, $a+\frac{2}{10}$, etc. Et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à trouver deux nombres décimaux ayant

une différence aussi petite qu'on veut, et comprenant une seule racine.

238. Méthode par substitutions successives. — Elle est plus simple que la précédente, mais imparfaite. Il suffit de nous occuper des racines positives, les racines négatives étant les racines positives de $F(-x)$. Substituons, dans $F(x)$, à x des nombres compris entre 0 et la limite L des racines positives; si cette limite est quelque peu grande, on commence par les nombres 0, 1, 10, 100, ... Lorsque deux résultats consécutifs de substitution sont de signes contraires, les valeurs correspondantes de x comprennent un nombre impair de racines de $F(x)$. Il peut arriver que le nombre de ces intervalles où l'existence d'une racine est certaine, soit égal à la limite supérieure assignée par le théorème de Descartes au nombre des racines positives; dans ce cas, les racines sont séparées. Mais généralement il n'en est pas ainsi; alors on subdivise les intervalles, ou bien l'on a recours à d'autres procédés (l'étude de la dérivée, l'emploi du théorème de Rolle, etc.).

Un perfectionnement important de cette méthode est dû à Lagrange. Il consiste à déterminer une limite inferieure $\frac{1}{\delta}$ du module de la différence de deux racines de $F(x) = 0$; cette quantité δ s'obtient au moyen de l'équation aux carrés des différences des racines de $F(x) = 0$ (**180**). Si l'on remplace x par des nombres en progression arithmétique de raison $\frac{1}{\delta}$, deux termes consécutifs de cette progression ne peuvent comprendre plus d'une racine de $F(x) = 0$; par suite, s'ils en comprennent une, les résultats de substitution correspondants sont de signes contraires. En multipliant les racines de $F(x) = 0$ par δ, on obtient une équation dont deux racines n'ont jamais la même partie entière; il suffit maintenant de substituer à x des nombres entiers consécutifs, pour trouver des intervalles comprenant une racine de la transformée.

239. Exemples.

1° $$x^4 - 5x - 10 = 0.$$

Le théorème de Descartes montre que l'équation a une seule racine positive et une seule racine négative. La règle de Lagrange donne $L = 1 + \sqrt[3]{10}$ ou 4, $L' = 1 + \sqrt[4]{10}$ ou 3. On trouve, pour

$$\begin{array}{rrrrrrr} x = & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3: \\ F(x) = & 16, & -4, & -10, & -14, & -4, & 56. \end{array}$$

Il résulte de là que la racine positive est comprise entre 2 et 3, la racine négative entre — 1 et — 2.

2° $$x^4 + x^2 - 65x + 5 = 0.$$

L'équation a deux variations, donc elle peut avoir deux racines positives. Elle n'a pas de racine négative.

En groupant ainsi : $x(x^3 - 65) + x^2 + 5 = 0$, on trouve $L = \sqrt[3]{65}$, soit $L + 5$. Ensuite, pour

$$\begin{array}{llllll} x = 0, & 1, & 2, & 3, & 4 : \\ F(x) = 5, & -58, & -105, & -100, & 17. \end{array}$$

Les racines sont séparées : il y en a une entre 0 et 1, une seconde entre 3 et 4.

3° $$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, l'équation a deux racines positives ou n'en a pas ; elle a une racine négative.

En groupant ainsi : $x(x^2 + 3x - 17) + 5$, on voit que $\dfrac{-3 + \sqrt{9 + 68}}{2}$ (ou 3) est une limite supérieure des racines. De

$$-F(-x) = x(x^2 - 3x - 18) + (x - 5),$$

on déduit $L' = 6$. Formons maintenant le tableau :

$$\begin{array}{lllll} x = -6, -5, \ldots, 0, & 1, & 2, & 3, \\ F(x) = -1, \ 40, \ldots, 5, & -8, & -9, & +8 ; \end{array}$$

nous en concluons l'existence d'une racine dans chacun des intervalles

$$(-6, -5), \quad (0, 1), \quad (2, 3).$$

Déterminons la dernière de ces racines à moins d'un dixième près. A cet effet, nous pourrions substituer, dans $F(x)$, à x les nombres 2, 2,1, 2,2, ... jusqu'à ce que deux résultats consécutifs soient de signes contraires. Pour diminuer ces essais, nous faisons une *interpolation par parties proportionnelles*, ce qui revient à admettre que les accroissements de $F(x)$ sont proportionnels à ceux de x, tant que x varie entre des limites assez

rapprochées. On a trouvé $F(2) = -9$, $F(3) = 8$; si $2 + \alpha$ est la racine, on a $F(2 + \alpha) = 0$. De là, la proportion

$$\frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} = \frac{F(2 + \alpha) - F(2)}{2 + \alpha - 2},$$

donc approximativement $\alpha = \frac{9}{17}$.

Ainsi, la racine est sensiblement $2 \frac{9}{17}$ ou 2.6. Comme $F(2, 6) = -1{,}344$ et $F(3) = 8$, la racine est comprise entre 2, 6 et 3; enfin, de $F(2, 7) = +0{,}653$ on déduit qu'elle est comprise entre 2,6 et 2,7.

4° $$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Cette équation a une racine négative; elle peut avoir deux racines positives. En écrivant $x(x^2 - 7) + 7$, on trouve $L = \sqrt{7}$ et de $-F(-x) = x^3 - 7x - 7$, on déduit $L' = 1 + \sqrt{7}$ ou 4.

Ensuite, pour

$$x = -4, -3, \dots, 0, 1, 2, 3:$$
$$F(x) = -29, \quad 1, \dots, 7, 1, 1, 13.$$

La racine négative est séparée. Quant aux racines positives, les substitutions ne nous apprennent rien. Cependant (**206**)

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 12\frac{1}{4} - 12\frac{19}{27} < 0,$$

de sorte que les trois racines sont réelles. Il faut conclure de là que deux racines positives tombent dans le même intervalle. Ces racines comprennent une racine de l'équation dérivée $F'(x) = 3x^2 - 7 = 0$; la racine $x = +\sqrt{\frac{7}{3}}$ de la dérivée étant comprise entre 1 et 2, les racines de $F(x) = 0$ appartiennent à l'intervalle (1, 2), et l'une d'elles est comprise entre 1 et $\sqrt{\frac{7}{3}}$, la seconde entre $\sqrt{\frac{7}{3}}$ et 2.

Déterminons ces racines à moins d'un dixième près. Comme

$$F(1, 5) = -0{,}125,$$

deux interpolations par parties proportionnelles conduisent aux valeurs approchées 1,3 et 1,7. On trouve ensuite

$$\begin{cases} F(1,3) = 0{,}097, \\ F(1,4) = -0{,}056; \end{cases} \qquad \begin{cases} F(1,7) = 0{,}013, \\ F(1,6) = -0{,}004, \end{cases}$$

de sorte que les racines cherchées sont, à moins d'un dixième près par défaut, 1,3 et 1,6.

5° $$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0.$$

L'équation n'a pas de racine négative; elle peut avoir une ou trois racines positives. La méthode par groupement des termes donne L = 2. Formons le tableau

$$\begin{array}{rrrr} x = & 0, & 1, & 2, \\ F(x) = & -7, & -3, & 3. \end{array}$$

Il en résulte qu'il existe au moins une racine dans l'intervalle (1, 2); mais on peut aussi supposer soit deux autres racines réelles dans l'intervalle (1, 2) ou dans l'intervalle (0, 1), soit deux racines imaginaires. Considérons la dérivée

$$F'(x) = 3x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Ses racines étant imaginaires, $F'(x)$ est constamment positive, $F(x)$ constamment croissante; donc l'équation $F(x) = 0$ a une seule racine réelle, appartenant à l'intervalle (1, 2).

Calcul des racines.

240. Méthode de Newton. — Supposons qu'on ait déterminé une racine de $F(x) = 0$ avec une certaine approximation, par exemple à moins de $\frac{1}{10}$ près. Soient a la valeur approchée, $a + h$ la valeur exacte de la racine; h sera le *terme de correction*. On doit avoir

$$F(a + h) \equiv F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \ldots = 0.$$

Si la quantité h est suffisamment petite, les termes en h^2, h^3, .. seront généralement négligeables et l'on aura sensiblement

$$F(a) + hF'(a) = 0, \quad \text{ou} \quad h = -\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

De là, la règle suivante formulée par Newton :

Si a *est une valeur approchée d'une racine de* $F(x) = 0$, *on obtient généralement une valeur plus approchée en ajoutant à* a *la quantité* $-\frac{F(a)}{F'(a)}$.

On admet généralement que la méthode de Newton double le nombre des chiffres décimaux que renferme le nombre a ; soit h_1 le quotient ainsi déterminé et posons $a_1 = a + h_1$. On peut maintenant opérer sur a_1 comme tantôt sur a, et doubler le nombre des chiffres décimaux exacts de la racine. Et ainsi de suite.

241. Interprétation géométrique. — L'équation $y = F(x)$ représente une certaine courbe AB (*fig.* 13) ; une racine de

Fig. 13.

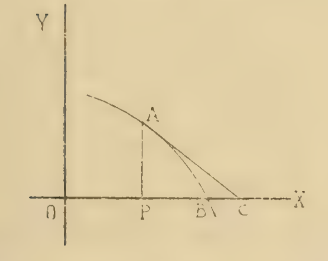
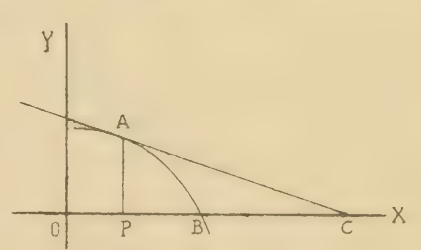


Fig. 14.



l'équation $F(x) = 0$ est l'abscisse du point B où cette courbe coupe OX ; une valeur approchée $a = OP$ correspond à un certain point A de la courbe. Menons la tangente en A, qui rencontre OX en C : la méthode de Newton revient à remplacer OB par OC, c'est-à-dire l'arc AB par la tangente AC.

En effet, l'équation de la tangente au point $A(a, F(a))$ est

$$Y - F(a) = F'(a)(X - a) ;$$

d'où la sous-tangente $X - a = -\frac{F(a)}{F'(a)}$; PC est donc le terme de correction de Newton.

Cette interprétation géométrique montre que la correction de Newton peut éloigner plus de la racine cherchée que la valeur a (*fig.* 14), et même donner une valeur s'éloignant plus de cette racine que a et dans le même sens.

242. Cas où la méthode de Newton peut être appliquée avec certitude. — Soient a et $b > a$ deux nombres comprenant

une racine de $F(x) = 0$. Cette racine étant désignée par $a + h$ ou par $b - k$, où h et k sont des nombres positifs moindres que $b - a$, on a

$$F(a + h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \ldots = 0,$$

$$F(b + k) = F(b) - kF'(b) + \frac{k^2}{1.2} F''(b) - \ldots = 0.$$

On admet, sans démonstration, que ces égalités se réduisent sensiblement à

$$F(a) + hF'(a) = 0, \quad F(b) - kF'(b) = 0;$$

de sorte qu'approximativement,

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)}, \quad k = \frac{F(b)}{F'(b)}. \qquad (1)$$

Il résulte de là que, si h est négatif, on ne peut réduire l'équation $F(a + h) = 0$ à $F(a) + hF'(a) = 0$; de même la valeur de k est inadmissible si elle est négative. Il faut aussi rejeter les valeurs (1) si elles sont supérieures à la différence $b - a$.

La méthode de Newton présente donc une grande incertitude. Voici un cas assez étendu où elle peut être appliquée sans mécompte.

On connaît deux nombres a et b qui comprennent une racine, et une seule, de $F(x)$. Sur la courbe $y = F(x)$, il correspond aux abscisses $OA' = a$, $OB' = b$ deux points A, B situés de part et d'autre de OX, car $F(a)$ et $F(b)$ sont de signes contraires. Supposons que l'arc AB ne présente ni point maximum ni point minimum ni point d'inflexion. Alors la dérivée $F'(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b) et va constamment en croissant ou en décroissant. La figure peut présenter quatre dispositions.

Dans la figure 15, l'arc AB est constamment concave vers le haut; le coefficient angulaire $F'(x)$ de la tangente va en croissant, donc $F''(x)$ est positive. Si l'on applique la méthode de Newton à la valeur approchée b, on est sûr que la valeur de la racine qui en résulte est plus approchée que b; car la tangente en B passe entre la courbe et l'ordonnée BB', et OC approche plus de la valeur exacte OD de la racine que OB'.

Dans la figure 16, l'arc AB est constamment convexe vers le haut; comme $F'(x)$ va en diminuant, $F''(x)$ est négative. La

Fig. 15.

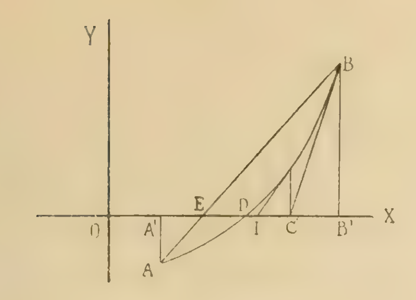
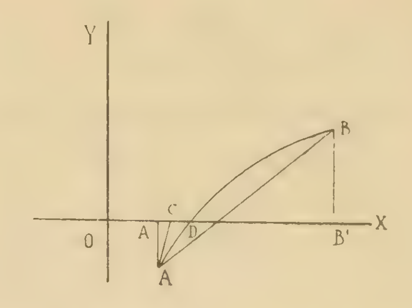


Fig. 16.



tangente en A passe entre l'ordonnée AA′ et la courbe ADB; donc si l'on remplace l'arc AD par la tangente AC, on obtient une valeur OC qui approche plus de la racine OD que $OA' = a$.

De même, dans les cas représentés par les figures 17 et 18, il convient d'appliquer la méthode de Newton respectivement

Fig. 17.

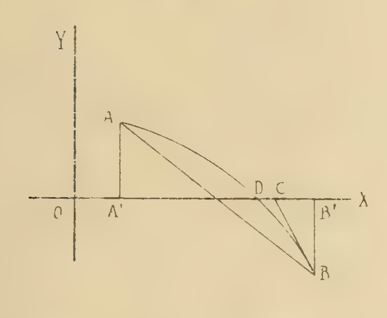
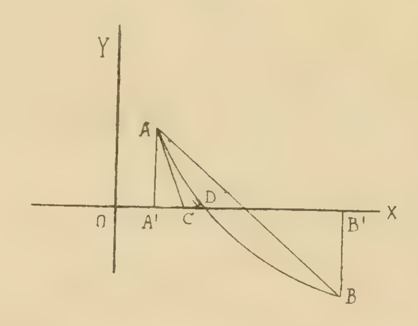


Fig. 18.



aux valeurs approchées b et a; dans la figure 17, la dérivée $F''(x)$ est négative, et dans la figure 19 elle est positive pour les valeurs de x comprises entre a et b.

Dans les quatre cas, l'une des valeurs approchées a, b jouit de la propriété que, si on lui applique la méthode de Newton, la nouvelle valeur approche plus de la racine que la valeur d'où l'on part. *Cette valeur est celle qui donne le même signe à* $F(x)$ *et* $F''(x)$.

Pour fixer les idées, considérons la figure 15. Nous appliquons la méthode de Newton à la valeur approchée b; la nouvelle valeur approchée sera $b_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)} = OC$. On peut évaluer l'erreur que l'on commet en prenant b_1 pour la racine

cherchée. Menons la corde AB qui coupe OX en E ; OD est compris entre OE et OC. Donc l'erreur commise en adoptant OC pour OD, est moindre que EC = OC — OE. OE est la valeur résultant d'une interpolation par parties proportionnelles, car $\frac{A'E}{A'B'} = \frac{A'A}{A'A + B'B}$.

Soit CF l'ordonnée élevée en C ; menons la tangente FI. Si l'on applique une seconde fois la méthode de Newton à la valeur OC qui est donnée par une première application de cette méthode, on trouve OI pour valeur de la racine cherchée. On voit que la règle étant appliquée plusieurs fois de suite dans les conditions indiquées, on approche de plus en plus de la racine.

245. Exemple. $x^3 - 2x - 5 = 0.$

Cherchons la racine positive (unique) de cette équation.

Une limite est $L = 1 + \sqrt{5}$ ou 4. Formons le tableau

$$x = \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,$$
$$F(x) = -5, -6, -1, \quad 16 ;$$

on voit que la racine est comprise entre 2 et 3, et est sensiblement égale à $2\frac{1}{17}$. Or $F(2,1) = 0{,}061$; donc la racine est comprise entre 2 et 2,1.

On a

$$F'(x) = 3x^2 - 2, \quad F''(x) = 6x.$$

$F'(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (2, 2, 1) et $F''(x)$ a le même signe que $F(x)$ pour $x = 2, 1$. Donc on peut appliquer avec certitude la méthode de Newton en partant de la valeur approchée 2, 1.

Le terme de correction de Newton étant

$$-\frac{F(2,1)}{F'(2,1)} = -\frac{0.061}{11.23} = -0{,}00543\ldots,$$

la valeur approchée correspondante est 2,1 − 0,00543... = 2.09456...

Soit $2{,}1 - k$ la valeur résultant d'une interpolation par parties proportionnelles entre 2 et 2,1 ; on aura

$$\frac{F(2,1) - F(2)}{2{,}1 - 2} = \frac{F(2,1) - F(2{,}1 - k)}{k}.$$

d'où la valeur approchée

$$2,1 - \frac{0.0061}{1.061} = 2,1 - 0,00574 \ldots = 2,09425 \ldots$$

La valeur exacte de la racine cherchée est comprise entre les valeurs approchées 2,09456 ... et 2,09425 que donnent la méthode de Newton et l'interpolation par parties proportionnelles. La première valeur 2,09456 ... comporte donc une erreur moindre que la différence entre les deux valeurs ou moindre que 0,0003....

Appliquons une seconde fois la méthode de Newton, en partant de la valeur approchée $a = 2,094$; le terme de correction est

$$-\frac{F(a)}{F'(a)} = \frac{0,006153416}{11,154508} = 0,00055 \ldots$$

D'où la seconde valeur approchée 2,094 — 0,00055... = 2,09445. Et ainsi de suite.

244. Méthode de Lagrange. — Soient a, $a+1$ deux nombres entiers consécutifs qui comprennent une seule racine de l'équation $F(x) = 0$. Désignons cette racine par $x = a + \frac{1}{x_1}$; x_1 est un nombre supérieur à l'unité, donné par l'équation $F\left(a + \frac{1}{x_1}\right) = 0$, ou $F_1(x_1) = 0$. Celle-ci ayant une seule racine plus grande que 1, la substitution des nombres 1, 2, 3, ... dans $F_1(x_1)$ fait connaître la partie entière de x_1 ; si $F_1(a_1)$ et $F_1(a_1+1)$ sont de signes contraires, nous poserons $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, etc. La racine se présente donc sous la forme

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

Supposons maintenant que les nombres a, $a+1$ comprennent deux racines x, x'. L'équation $F_1(x_1) = 0$ aura deux racines plus grandes que l'unité. Si la substitution des nombres 1, 2, 3, ... dans $F_1(x_1)$ fait reconnaître que x_1 a une valeur comprise entre a_1 et a_1+1, une autre entre a'_1 et a'_1+1, on pose

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}, \quad x' = a + \cfrac{1}{a'_1 + \cfrac{1}{x'_2}},$$

x_2 et x'_2 étant respectivement la seule racine supérieure à l'unité des équations

$$F_1\left(a_1 + \frac{1}{x_2}\right) = 0, \quad F_1\left(a'_1 + \frac{1}{x'_2}\right) = 0.$$

Le calcul se continue sur chacune de ces équations comme ci-dessus. Si l'équation $F_1(x) = 0$ a deux racines comprises entre a_1 et $a_1 + 1$, l'équation $F_1\left(a_1 + \frac{1}{x_2}\right) = 0$ aura deux racines supérieures à l'unité. Les racines finiront par se séparer.

Supposons qu'en substituant dans $F(x)$ les nombres

$$a, \quad a + \frac{1}{n}, \quad a + \frac{2}{n}, \quad a + \frac{3}{n}, \quad \ldots, \quad a + \frac{n-1}{n}, \quad a + 1,$$

on trouve deux fois des résultats consécutifs de signes contraires, de manière à séparer les racines x, x'. Dans ce cas, multiplions les racines de $F(x) = 0$ par n; les produits nx, nx' n'auront pas même partie entière et l'on pourra opérer comme dans le premier cas.

Ces développements suffisent pour donner une idée de la méthode de Lagrange.

Exercices et notes.

1. Séparer les racines des équations

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0, \quad 4x^5 - 3x^2 + 2 = 0,$$
$$5x^4 - 4x^3 + 7 = 0, \quad x^6 + x^5 - 2x^3 + 3 = 0,$$
$$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 21 = 0, \quad 4x^4 + 5(x^3 + x^2 + x + 1) = 0.$$

2. Résoudre $20x^3 - 24x^2 + 3 = 0$.

Réponse : — 0,31469, 0,44603, 1,06865

3. L'équation $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 13x + 4 = 0$ a une racine comprise entre 1 et 2 : trouver cette racine avec quatre chiffres décimaux.

Réponse : 1,6369.

On diminue d'une unité les racines ; la transformée se calcule aisément par la méthode de Horner (**135**). Multiplions les racines de la transformée par 10, ce qui donne $x^4 + 80x^3 + 1400x^2 - 300x - 6000 = 0$. Cette nouvelle équation admet une racine comprise entre 6 et 7 ; diminuons de 6 les racines de cette équation et multiplions par 10 les racines de la transformée, etc.

4. Appliquer la méthode de Lagrange aux équations

$$x^3 - 2x - 5 = 0, \quad x^3 - 6x - 13 = 0.$$

La racine positive est, respectivement, (2, 10, 1, 1, ...), (3, 5, 1, 1, ...).

CHAPITRE XVII.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Préliminaires.

245. Une fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ est dite *rationnelle*, lorsque ses deux termes sont des fonctions entières. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, la fraction irréductible et le numérateur d'un degré inférieur au degré du dénominateur. Si $f(x)$ était d'un degré égal ou supérieur, on diviserait $f(x)$ par $F(x)$, et l'on mettrait la fraction proposée sous la forme $Q + \frac{\varphi(x)}{F(x)}$, Q étant un polynome entier et $\varphi(x)$ étant d'un degré moindre que $F(x)$.

Nous nommerons *fractions simples* les fractions de la forme

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

A, B, a, α, β étant des constantes, et n étant un nombre entier positif.

Toute fraction rationnelle peut se décomposer en une somme de fractions simples. Pour établir cette proposition, nous considérons séparément le cas où le dénominateur de la fraction n'a que des facteurs premiers inégaux, et celui où il admet des facteurs multiples. Nous montrerons ensuite comment il convient de modifier la décomposition, lorsque l'équation $F(x) = 0$ a des racines imaginaires.

CAS DES FACTEURS INÉGAUX.

246. Méthode des coefficients indéterminés. — Soient a, b, c, ..., l les m racines, supposées distinctes, de $F(x)$. On peut toujours déterminer des constantes A, B, C, ..., L telles, que l'on ait *identiquement*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l}.$$

En effet, cette égalité donne

$$\left.\begin{aligned} f(x) = {} & A(x-b)(x-c)\dots\dots(x-l) \\ & + B(x-a)(x-c)\dots\dots(x-l) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + L(x-a)(x-b)\dots\dots(x-k) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

eu égard à l'identité $F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$.

Le second membre se ramène à un polynome de degré $m-1$; par hypothèse, $f(x)$ est au plus de ce degré. Si donc on égale les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de (1), on aura m équations du premier degré, entre les m inconnues A, B, ... L.

Il reste à démontrer que ces équations forment un système compatible et déterminé. La méthode suivante nous dispense d'examiner le système ; elle fournit aussi un procédé très simple pour déterminer directement chaque inconnue.

247. Calcul des numérateurs. — Les deux membres de (1) doivent être identiques; donc ils ont la même valeur pour $x = a$, et

$$f(a) = A(a-b)(a-c)\dots(a-l), \qquad (2)$$

d'où l'on tire pour A une valeur finie et déterminée. On trouve de même B en remplaçant x par b, C en remplaçant x par c, etc. Portons ces valeurs de A, B, ... L dans l'égalité (1). Les deux membres prendront des valeurs égales pour les m valeurs $x = a, b, \dots, l$; comme ils sont au plus de degré $m-1$, ils sont identiques (**121**).

248. Remarque. — En dérivant $F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$, on obtient

$$F'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l) + (x-a)(x-c)\dots(x-l) + \dots,$$

et en remplaçant x par a,

$$F'(a) = (a - b)(a - c) \dots (a - l). \qquad (3)$$

Des égalités (2) et (3) on conclut $A = \frac{f(a)}{F'(a)}$; les coefficients A, B, ... ont donc la forme suivante :

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad \dots, \quad L = \frac{f(l)}{F'(l)}.$$

249. Exemple. — Décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - 12x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

En effectuant la division du numérateur par le dénominateur, on trouve pour quotient $2x + 1$, pour reste $5x^2 - 15x + 4$.

Le dénominateur étant égal à $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$, posons

$$\frac{5x^2 - 15x + 4}{(x - 2)(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1};$$

en chassant les dénominateurs, on obtient

$$5x^2 - 15x + 4 = A(x^2 - 1) + B(x - 2)(x + 1) + C(x - 2)(x - 1). \quad (4)$$

Identifiant les deux membres de (4) on trouve

$$A + B + C = 5, \quad B + 3C = 15, \quad -A - 2B + 2C = 4.$$

Ce système d'équations a pour solution

$$A = -2, \quad B = 3, \quad C = 4.$$

On arrive plus rapidement au résultat en remplaçant, dans les deux membres de (4), x successivement par 2, 1, — 1. Enfin, pour appliquer la méthode du § **248**, on substitue les nombres 2, 1, — 1 dans la fraction

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{5x^2 - 15x + 4}{3x^2 - 4x - 1}.$$

La fraction proposée prend donc la forme

$$2x + 1 - \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 1} + \frac{4}{x + 1}.$$

CAS DES FACTEURS ÉGAUX.

250. Forme de la décomposition. — Supposons que le dénominateur $F(x)$ soit de la forme $(x-a)^\alpha F_1(x)$, $F_1(x)$ étant une fonction entière qui ne contient pas le facteur $x-a$. Nous avons identiquement

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x) - A_\alpha F_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}; \qquad (5)$$

car si l'on fait la différence des deux 1res fractions, on trouve la 3e. Déterminons A_α par la condition que le numérateur de la dernière fraction soit divisible par $x-a$ ou s'annule pour $x=a$; nous aurons

$$A_\alpha = \frac{f(a)}{F_1(a)},$$

valeur finie et déterminée, puisque $f(a) \neq 0$ et $F_1(a) \neq 0$.

Divisons $f(x) - A_\alpha F_1(x)$ par $x-a$; soit $f_1(x)$ le quotient. L'égalité (5) prend la forme

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} F_1(x)}.$$

Donc, *la fraction proposée est décomposable en une fraction simple de la forme* $\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$, *et en une nouvelle fraction rationnelle dont le dénominateur ne renferme plus que la puissance* $(\alpha - 1)$ *du facteur* $(x-a)$.

Raisonnant sur celle-ci comme sur la fraction primitive, on obtient :

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} F_1(x)} = \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} F_1(x)},$$

$$\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} F_1(x)} = \frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3} F_1(x)},$$

. . . .

$$\frac{f_{\alpha-1}(x)}{(x-a) F_1(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}.$$

Par suite,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}.$$

Si $F_1(x) = (x-b)^{\beta} F_2(x)$, on trouve, de la même manière,

$$\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)} = \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{f_{\alpha+\beta}(x)}{F_2(x)}.$$

Et ainsi de suite.

251. Théorème. — *Une fraction rationnelle* $\frac{f(x)}{F(x)}$ (*), *dont le dénominateur est égal à* $(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$, *est décomposable en éléments simples selon la formule*

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda},\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

et cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

La première partie de la proposition a déjà été démontrée (**250**).

Pour établir la seconde, observons d'abord que toute décomposition de $\frac{f(x)}{F(x)}$ en éléments simples ne peut comprendre que des fractions ayant pour dénominateur l'une des puissances de $x-a$, $x-b$, ..., $x-l$. Car, si une décomposition comprenait

$$\frac{N_1}{x-n} + \frac{N_2}{(x-n)^2} + \dots + \frac{N_\nu}{(x-n)^\nu}, \qquad (A)$$

où n serait différent de a, b, ..., l, on pourrait réduire la somme (A) en une seule fraction de la forme $\frac{N}{(x-n)^\nu}$, N désignant un polynome au plus de degré $\nu - 1$; d'après cette décomposition, $\frac{f(x)}{F(x)}$ aurait une valeur infinie pour $x = n$, ce qui exige que $F(x)$

(*) $f(x)$ est de degré moindre que $F(x)$.

renferme le facteur $x - a$. Supposons ensuite qu'il existe la décomposition (6) et une seconde décomposition

$$\frac{A'_1}{x-a} + \frac{A'_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A'_{\alpha'}}{(x-a)^{\alpha'}} + \frac{B'_1}{x-b} + \dots .$$

Je dis que $\alpha = \alpha'$, $A_\alpha = A'_{\alpha'}$. En effet, si $\alpha > \alpha'$, égalons les deux décompositions après les avoir multipliées par $(x-a)^\alpha$; il vient

$$\left.\begin{aligned} &A_1(x-a)^{\alpha-1} + A_2(x-a)^{\alpha-2} + \dots + A_\alpha + (x-a)^\alpha\left[\frac{B_1}{x-b} + \dots\right] \\ &= (x-a)^{\alpha-\alpha'}[A'_1(x-a)^{\alpha'-1} + \dots + A'_{\alpha'}] + (x-a)^\alpha\left[\frac{B'_1}{x-b} + \dots\right] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Cette égalité est impossible ; car le premier membre, pour $x = a$, se réduit à A_α, tandis que le second devient nul. On démontre de même qu'on ne peut avoir $\alpha' > \alpha$. Si, dans l'égalité (7), on suppose $\alpha = \alpha'$, et qu'on fasse $x = a$, on trouve $A_\alpha = A_{\alpha'}$.

Supprimons maintenant dans les deux décompositions la fraction commune $\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$; les restes étant égaux, on voit, en raisonnant comme tantôt, que $A_{\alpha-1} = A'_{\alpha-1}$. Et ainsi de suite.

252. Calcul des numérateurs. — Pour déterminer les numérateurs A_α, $A_{\alpha-1}$, ..., A_1, on peut suivre la marche indiquée au § **250** ou employer la méthode des coefficients indéterminés. Le procédé suivant est préférable lorsque α est quelque peu grand.

Posons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}; \quad (8)$$

nous aurons l'identité

$$\begin{aligned} f(x) = A_\alpha F_1(x) &+ A_{\alpha-1}(x-a)F_1(x) + \dots \\ &+ A_1(x-a)^{\alpha-1}F_1(x) + (x-a)^\alpha f_\alpha(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Si l'on y fait $x = a$, on trouve $f(a) = A_\alpha F_1(a)$; A_α est donc

connu. En dérivant les deux membres de (9) par rapport à x, on obtient

$$f'(x) = A_\alpha F'_1(x) + A_{\alpha-1}F_1(x) + A_{\alpha-1}(x-a)F'_1(x) + \ldots, \quad (10)$$

égalité qui, pour $x = a$, se réduit à

$$f'(a) = A_\alpha F'_1(a) + A_{\alpha-1}F_1(a);$$

on en conclut $A_{\alpha-1}$. Dérivant ensuite les deux membres de (10) et faisant $x = a$, on trouve $A_{\alpha-2}$. On continue ainsi jusqu'à la dérivée d'ordre $\alpha - 1$. Dans ces calculs, on peut négliger les dérivées du dernier terme de (9); car elles s'annulent pour $x = a$.

253. Voici une autre méthode. Multiplions les deux membres de l'égalité (8) par $(x-a)^\alpha$:

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = A_\alpha + A_{\alpha-1}(x-a) + A_{\alpha-2}(x-a)^2 + \ldots + A_1(x-a)^{\alpha-1} + \frac{(x-a)^\alpha f_\alpha(x)}{F_1(x)},$$

et remplaçons $x - a$ par h :

$$\frac{f(a+h)}{F_1(a+h)} = A_\alpha + A_{\alpha-1}h + A_{\alpha-2}h^2 + \ldots + A_1 h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha f_\alpha(a+h)}{F_1(a+h)}.$$

D'autre part, développons $f(a+h)$ et $F_1(a+h)$ suivant les puissances croissantes de h, et effectuons la division du premier polynome par le second jusqu'à ce qu'on trouve au quotient un terme en $h^{\alpha-1}$; le quotient complet de la division est de la forme

$$Q_0 + Q_1 h + Q_2 h^2 + \ldots + Q_{\alpha-1}h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi(h)}{F_1(a+h)}.$$

Les nombres $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\alpha-1}$ sont les valeurs cherchées de $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots, A_1$.

254. Application. — Décomposer en fractions simples

$$\frac{5x^2+5x-6}{(x-1)^3(x+1)x}.$$

Posons

$$\frac{5x^2+5x-6}{(x-1)^3(x+1)x} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x}; \quad (11)$$

cette égalité donne

$$\left.\begin{array}{l}5x^2+5x-6=A(x^2+x)+B(x-1)(x^2+x)+C(x-1)^2(x^2+x)\\ \qquad +(x-1)^3[Dx+E(x+1)].\end{array}\right\} \quad (12)$$

Remplaçons x par 1, — 1, 0 ; il vient

$$A=2, \quad D=-\frac{3}{4}, \quad E=6.$$

Si l'on dérive deux fois de suite l'égalité (12), on obtient

$$\begin{array}{l}10x+5=A(2x+1)+B[x^2+x+(x-1)(2x+1)]\\ \qquad +C[2(x-1)(x^2+x)+(x-1)^2(2x+1)]+\text{etc}.\end{array}$$

$$10=2A+B[2x+1+2x+1+\text{etc}.]+C[2(x^2+x)+\text{etc}.]+\text{etc}.$$

Faisons $x=1$; en prévision de cette hypothèse, nous n'avons pas écrit certains termes contenant le facteur $x-1$. Il vient

$$15=3A+2B, \quad 10=2A+6B+4C;$$

d'où

$$B=\frac{9}{2}, \quad C=-\frac{21}{4}.$$

Pour déterminer A, B, C on peut aussi multiplier l'égalité (11) par $(x-1)^3$:

$$\frac{5x^2+5x-6}{x^2+x}=A+B(x-1)+C(x-1)^2+\ldots;$$

remplaçant $x-1$ par h on trouve

$$\frac{4+15h+5h^2}{2+3h+h^2}=A+Bh+Ch^2+\ldots.$$

Effectuant la division indiquée on obtient pour quotient

$$2+\frac{9}{2}h-\frac{21}{4}h^2+\ldots.$$

Donc

$$A=2, \quad B=\frac{9}{2}, \quad C=-\frac{21}{4}.$$

Cas des facteurs imaginaires.

255. Facteurs imaginaires simples. — Dans ce qui précède, les racines de $F(x)$ peuvent être réelles ou imaginaires. Si les coefficients de $f(x)$ et $F(x)$ sont réels, les racines imaginaires de

$F(x)$ sont conjuguées deux à deux et on peut modifier la décomposition de $\frac{f(x)}{F(x)}$ de manière que les imaginaires en disparaissent.

Soit $\alpha + \beta i$ une racine simple de $F(x)$; la décomposition de $\frac{f(x)}{F(x)}$ comprend une partie de la forme

$$\frac{A}{x - \alpha - \beta i} + \frac{B}{x - \alpha + \beta i}. \tag{13}$$

On sait (**248**) que

$$A = \frac{f(\alpha + \beta i)}{F'(\alpha + \beta i)}, \quad B = \frac{f(\alpha - \beta i)}{F'(\alpha - \beta i)}.$$

Si l'on réduit A à la forme $\mu + \nu i$, la valeur de B sera $\mu - \nu i$ et l'expression (13) devient

$$\frac{\mu + \nu i}{x - \alpha - \beta i} + \frac{\mu - \nu i}{x - \alpha + \beta i} = 2\frac{\mu(x - \alpha) - \nu\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Donc, *la somme des fractions simples correspondant aux facteurs conjugués* x — α — βi, x — α + βi *est une fraction qui a pour numérateur un binome du premier degré, à coefficients réels, et pour dénominateur* $(x - \alpha)^2 + \beta^2$.

256. Facteurs imaginaires multiples. — Si $\alpha + \beta i$ est p fois racine de $F(x)$, $\alpha - \beta i$ est également p fois racine, et

$$F(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p F_1(x).$$

On a identiquement

$$\frac{f(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p F_1(x)} = \frac{Ax + B}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{f(x) - (Ax + B)F_1(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p F_1(x)}. \tag{14}$$

Déterminons A et B par la condition que $f(x) - (Ax + B)F_1(x)$ soit divisible par $(x - \alpha)^2 + \beta^2$. Si $f_1(x)$ est le quotient et $Rx + S$ le reste, nous posons $R = 0$, $S = 0$; ces équations détermineront les valeurs de A et B. L'égalité (14) devient

$$\frac{f(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p F_1(x)} = \frac{Ax + B}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{f_1(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-1} F_1(x)}.$$

Opérons de la même manière sur la dernière fraction :

$$\frac{f_1(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-1} F_1(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}} + \frac{f_2(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-2} F_1(x)}.$$

Et ainsi de suite. En résumé, on trouve la décomposition

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{A_1x + B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}} + \cdots$$
$$+ \frac{A_{p-1}x + B_{p-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{f_p(x)}{F_1(x)}.$$

257. Calcul des coefficients. — L'égalité précédente donne

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (Ax + B)F_1(x) + (A_1x + B_1)[(x-\alpha)^2 + \beta]^2F_1(x) + \dots \\ + (A_{p-1}x + B_{p-1})[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}F_1(x) + [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^pf_p(x). \end{array}\right\} \quad (15)$$

Si l'on fait $x = \alpha + \beta i$, il vient

$$f(\alpha + \beta i) = [A\alpha + A\beta i + B]F_1(a + \beta i);$$

égalant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on obtient deux équations qui font connaître A et B. Dérivant les deux membres de (15) et faisant de nouveau $x = a + \beta i$, on trouve une équation en A, B, A_1, B_1 qui se décompose en deux autres servant à déterminer à A_1 et B_1. Et ainsi de suite jusqu'à la dérivée d'ordre $(p-1)$. Dans le calcul des dérivées, on peut négliger le terme $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^pf_p(x)$.

258. Application. — Décomposer en fractions simples

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}.$$

Posons

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2+1};$$

il en résulte

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x + 1 = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x+1)(x^2+1)^2 \\ + (Cx + D)(x^2-1) + (Ex + F)(x^2-1)(x^2+1). \end{array}\right\} \quad (16)$$

Faisant successivement $x = -1, +1, i$, on obtient

$$1 = -8A, \quad 3 = 8B, \quad i = -2(Ci + D);$$

d'où $$A = -\frac{1}{8}, \quad B = \frac{3}{8}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = 0.$$

Dérivons les deux membres de (16) par rapport à x et remplaçons ensuite x par i. Dans le calcul de la dérivée du second

membre, on peut négliger les termes en x^2+1 et écrire simplement

$$2x+1 = \ldots + C(x^2-1) + 2x(Cx+D) + 2x(Ex+F)(x^2-1) + \ldots$$

On en tire $E = -\frac{1}{4}$, $F = -\frac{1}{2}$. La décomposition cherchée est donc

$$-\frac{1}{8(x+1)} + \frac{3}{8(x-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{4(x^2+1)}.$$

Exercices et notes.

1. Si $a, b, c, \ldots l$, désignent m nombres différents, et $f(x)$ une fonction entière du degré $m-2$ tout au plus, on a

$$\Sigma \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} = 0.$$

(Euler.)

On pose

$$F(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l), \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A}{x-a}.$$

d'où $$f(x) = \Sigma A(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Identifiant les coefficients de x^{m-1}, on trouve $A+B+\ldots L = 0$. Mais on a **(248)** $A = \frac{f(a)}{F'(a)}$, etc.

En particulier, si $p < m-1$,

$$\Sigma \frac{a^p}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} = 0.$$

2. Démontrer l'identité

$$(-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} + \frac{(a_1-b_1)(a_2-b_1)\ldots(a_n-b_1)}{b_1(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots(b_1-b_n)}$$
$$+ \frac{(a_1-b_2)(a_2-b_2)\ldots(a_n-b_2)}{b_2(b_2-b_1)(b_2-b_3)\ldots(b_2-b_n)}$$
$$+ \ldots + \frac{(a_1-b_n)(a_2-b_n)\ldots(a_n-b_n)}{b_n(b_n-b_1)(b_n-b_2)\ldots(b_n-b_{n-1})} = (-1)^n.$$

(Barbarin.)

On décompose en éléments simples la fraction

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)};$$

dans l'identité ainsi obtenue, on fait $x=0$.

3. Les constantes A, B, C, a, b, c étant données, déterminer A_1, B_1, C_1 de façon que l'expression

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle.

Identifier l'expression avec $\left(\frac{M}{x-a}+\frac{N}{x-b}+\frac{P}{x-c}\right)^2$ en décomposant $\frac{2MN}{(x-a)(x-b)}$, ... en fractions simples. Si $A+B+C=0$, le problème a une infinité de solutions.

4. Decomposer la fraction

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}.$$

Réponse : $$\Sigma\frac{(-1)^{n-p}}{1.2\dots(p-1).1.2\dots(n-p)}\frac{1}{x-p}.$$

5. Décomposer $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$, $f(x)$ étant une fonction entière dont le degré $q<p$.

Soient R_1, R_2, ... les restes de $f(x)$ divisée plusieurs fois de suite par $x-a$. On a (135)

$$\frac{f(x)}{(x-a)^p}=\frac{R_1}{(x-a)^p}+\frac{R_2}{(x-a)^{p-1}}+\dots$$

On peut aussi partir de l'égalité

$$f(x)=f(a+x-a)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\dots$$

6 Décomposer $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}$, $f(x)$ étant une fonction entière dont le degré $q<2p$.

Les numérateurs des fractions faisant partie de la décomposition sont les restes de $f(x)$ divisée plusieurs fois de suite par $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

7. Décomposer

$$\frac{5x^2+3x-1}{x^4+4},\quad\frac{3x-7}{x^2+1},\quad\frac{x^2-2x+3}{x^4+5x^2+4},\quad\frac{1}{x^6-1}.$$

$$\frac{x^2-1}{(x^2-1)(x^2+4)(x^2+9)},\quad\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(x-1)(x-3)(x-5)},\quad\frac{1}{(x-1)(x-3)\dots(x-2n+1)}$$

$$\frac{x^3+x}{x^4+1},\quad\frac{1}{x^2(x-1)(x-2)},\quad\frac{x}{(x-a)^2(x-b)^2},\quad\frac{x^4+1}{x^6+1}.$$

On observe que

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x).$$

8. **Décomposer**

$$\frac{1}{x^{2m}+1}, \quad \frac{1}{x^{2m+1}-1}, \quad \frac{1}{(x-a)^m(x-b)^m}.$$

CHAPITRE XVIII.

THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

DIFFÉRENCES DES DIVERS ORDRES.

259. Définitions. — Soit une suite quelconque de $n+1$ termes,

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}, \quad u_n. \tag{1}$$

On appelle *différences premières* ou *différences du premier ordre* des quantités (1), les différences obtenues en retranchant chacune de ces quantités de la suivante, et l'on pose

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \quad \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1};$$

on obtient ainsi une deuxième suite :

$$\Delta u_0, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \quad \ldots, \quad \Delta u_{n-1}. \tag{2}$$

Opérant sur la suite (2) comme sur la suite (1), on forme une troisième suite que l'on représente par

$$\Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1, \quad \Delta^2 u_2, \quad \ldots, \quad \Delta^2 u_{n-2}, \tag{3}$$

de sorte que

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0, \; \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1, \; \ldots, \; \Delta^2 u_{n-2} = \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2}.$$

Les quantités (3) sont les différences premières de la suite (2) et les *différences deuxièmes* de la suite donnée (1).

De même, si l'on pose

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0, \; \Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1, \; \ldots, \; \Delta^3 u_{n-3} = \Delta^2 u_{n-2} - \Delta^2 u_{n-3},$$

on obtient la suite

$$\Delta^3 u_0, \quad \Delta^3 u_1, \quad \Delta^3 u_2, \quad \ldots, \quad \Delta^3 u_{n-3}$$

des différences troisièmes des termes donnés. Ainsi de suite.

Les $(n+1)$ termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$ donnent lieu à n différences premières, à $n-1$ différences deuxièmes, etc., enfin à une seule différence de l'ordre n, représentée par $\Delta^n u_0$.

260. Tableau des différences successives. — On adopte ordinairement l'une ou l'autre des deux dispositions suivantes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_0, & u_1, & u_2, & u_3 & \ldots, & u_{n-2} & u_{n-1}, & u_n, \\
\Delta u_0, & \Delta u_1, & \Delta u_2 & \ldots\ldots\ldots, & \Delta u_{n-2}, & \Delta u_{n-1}, \\
\Delta^2 u_0, & \Delta^2 u_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \Delta^2 u_{n-2}, \\
\Delta^3 u_0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta^3 u_{n-3}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta^{n-1} u_0, & \Delta^{n-1} u_1, \\
\Delta^n u_0 .
\end{array}$$

u	Δ	Δ^2		Δ^{n-1}	Δ^n
u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	. . . .	$\Delta^{n-1} u_0$	$\Delta^n u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	. . . .	$\Delta^{n-1} u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	. . . .		
u_3	Δu_3	$\Delta_2 u_3$			
. . .	. . .	. . .			
u_{n-1}	Δu_{n-1}				
u_n					

(T)

Les schémas suivants indiquent la formation de ces tableaux :

$$\begin{array}{cc} a & b \\ & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} a & c \\ b & \end{array}$$

$$c = b - a, \quad a = b - c, \quad b = a + c.$$

Exemple. — Former le tableau des différences des quantités

$$5, \quad 11, \quad 19, \quad 15, \quad 4, \quad -2.$$

On trouve

5, 11, 19, 15, 4, — 2
6, 8, — 4, — 11, — 6,
2, — 12, — 7, 5
— 14, 5, 12,
19, 7,
— 12.

u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
5	6	2	— 14	19	— 12
11	8	— 12	5	7	
19	— 4	— 7	12		
15	— 11	5			
4	— 6				
— 2					

261. Remarque. — Désignons par T un tableau de différences successives, pris sous la seconde forme; par T′, le tableau qu'on déduit de T en supprimant les p premières lignes et les q premières colonnes. T′ est encore un tableau de différences successives : sa seconde colonne renferme les différences premières des termes de sa première colonne, sa troisième colonne les différences deuxièmes des mêmes termes, et ainsi de suite. Les notations des deux tableaux T et T′ deviennent identiques, si l'on ajoute p unités à l'indice de u et q unités à l'exposant de Δ dans chaque élément de T. Or, une formule écrite pour le tableau T doit s'appliquer aussi au tableau T′, les éléments de T étant remplacés par leurs homologues de T′; par conséquent, *une formule générale relative à un tableau de différences successives subsiste encore, lorsqu'on augmente tous les indices des* u *d'un entier quelconque* p *et tous les exposants des* Δ *d'un entier quelconque* q.

Les éléments de la première colonne de T, c'est-à-dire u_0, u_1, u_3, ... sont censés être remplacés par $\Delta^0 u_0$, $\Delta^0 u_1$, $\Delta^0 u_2$, ...

Cette remarque nous sera fort utile dans la suite.

Différences des fonctions entières.

Le calcul des différences est souvent appliqué aux valeurs successives $u_0, u_1, u_2, \ldots$ que prend une fonction de x quand on donne à x des valeurs en progression arithmétique.

262. Théorème. — *Si, dans un polynome entier en* x *de degré* m, *on remplace* x *par des nombres en progression arithmétique, les différences* m*es* *des résultats de substitution sont constantes.*

Soit la fonction $F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$.

Désignons les quantités

$$F(x),\ F(x+h),\ F(x+2h),\ \ldots,\ F(x+nh)$$

par

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n.$$

Nous aurons, par le théorème de Taylor,

$$\Delta u_0 = F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!}F^m(x);$$

comme les polynomes $F'(x)$, $F''(x)$,... sont des degrés $m-1$, $m-2$, ..., Δu_0 s'exprime par un polynome de degré $m-1$, dont le terme de degré $m-1$ est mA_0hx^{m-1} ; ce terme s'obtient donc en multipliant par h la dérivée du premier terme de $F(x)$.

En désignant $F(x+h) - F(x)$ par $F_1(x)$, on a évidemment

$$\Delta^2 u_0 = F_1(x+h) - F_1(x).$$

$F_1(x)$ étant de degré $m-1$, $\Delta^2 u_0$ est un polynome entier de degré $m-2$ dont le premier terme s'obtient en multipliant par h la dérivée du premier terme mA_0hx^{m-1} de $F_1(x)$; le premier terme de $\Delta^2 u_0$ est donc $m(m-1)A_0h^2x^{m-2}$. De même le premier terme de $\Delta^3 u_0$ est $m(m-1)(m-2)A_0h^3x^{m-3}$, et ainsi de suite. Finalement,

$$\Delta^m u_0 = m(m-1)\ldots 2.1.A_0h^m,$$

valeur indépendante de x ; ce qui démontre le théorème.

263. Application. — *Substituer des nombres entiers consécutifs dans une fonction entière.*

Pour fixer les idées, nous cherchons les valeurs du polynome

$$F(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 9$$

pour $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$.

Le polynome étant du 3e degré, les différences 3es des valeurs qu'il prend pour des valeurs de x en progression arithmétique sont constantes, égales au produit de la dérivée troisième du terme initial de $F(x)$ par le cube de la raison de la progression : ces différences ont donc pour valeur constante 12. Cherchons directement les résultats de substitution pour trois valeurs consécutives de x ; par exemple

$$F(-1) = 2, \quad F(0) = 9, \quad F(1) = 14.$$

Au moyen de ces nombres, il est facile de dresser le tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
— 4	— 151	85	— 38	12
— 3	— 66	47	— 26	12
— 2	— 19	21	— 14	12
— 1	**2**	**7**	**— 2**	**12**
0	**9**	**5**	10	**12**
1	**14**	15	22	**12**
2	29	37	34	
3	66	71		
4	137			

On inscrit d'abord, dans la colonne u, les valeurs $F(-1) = 2$, $F(0) = 9$, $F(1) = 14$; puis, dans la colonne Δu, leurs différences premières 7, 5 ; dans la colonne $\Delta^2 u$, leur différence seconde -2. Tous les nombres de la dernière colonne sont égaux à 12. Pour remplir les autres colonnes, on a recours au schéma

$$\begin{matrix} a & c \\ b & \end{matrix} \qquad b = a + c, \quad a = b - c :$$

$$-2 + 12 = 10, \qquad 10 + 12 = 22, \qquad 22 + 12 = 34,$$

$$-2 - 12 = -14, \quad -14 - 12 = -26, \quad -26 - 12 = -38 \text{ etc.}$$

Formules des différences.

264. Problème. I. — *Connaissant le premier terme* u_0 *d'une suite, ainsi que ses différences successives* Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... $\Delta^n u_0$, *calculer les termes* u_1, u_2, ... u_n.

D'après la définition même des différences, on a

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0; \qquad (1)$$

puis, en ajoutant membre à membre,

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0; \qquad (2)$$

et en augmentant d'une unité les exposants de Δ (261)

$$\Delta u_2 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta_3 u_0.$$

Mais $u_2 + \Delta u_0 = u_3$; donc

$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Sans aller plus loin, on prévoit la formule suivante :

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + \dots + C_n^1 \Delta^{n-1} u_0 + \Delta^n u_0. \qquad (3)$$

Pour montrer qu'elle est générale, supposons-la établie pour la suite $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$. Si nous introduisons un nouveau terme u_{n+1}, nous pouvons appliquer la formule (3) à la suite $\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_n$, ce qui donne

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C_n^1 \Delta^2 u_0 + C_n^2 \Delta^3 u_0 + \dots + C_n^1 \Delta^n u_0 + \Delta^{n+1} u_0. \qquad (4)$$

Or $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$; donc à cause de (3) et (4),

$$u_{n+1} = u_0 + (C_n^1 + 1)\Delta u_0 + (C_n^2 u + C_n^1)\Delta^2 u_0 + \dots + (1 + C_n^1)\Delta^n u_0 + \Delta^{n+1} u_0;$$

en remarquant que $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$, on voit que

$$u_{n+1} = u_0 + C_{n+1}^1 \Delta u_0 + C_{n+1}^2 \Delta^2 u_0 + \dots + C_{n+1}^1 \Delta^n u_0 + \Delta^{n+1} u_0.$$

La loi est donc générale.

On peut écrire l'équation (3) sous la forme symbolique

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0,$$

en convenant de développer $(1 + \Delta)^n$ comme si Δ représentait un nombre.

265. Problème II. — *Etant donnée la suite* $u_0, u_1, \dots, u_n$, *calculer les différences* $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \dots, \Delta^n u_0$.

Par définition,

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \quad \Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0;$$

il en résulte

$$\Delta^2 u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0.$$

Augmentant d'une unité les indices de u (**261**), on aura

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1 ;$$

d'où, en retranchant $\Delta^2 u_0$ de $\Delta^2 u_1$,

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.$$

Ces résultats font soupçonner la formule générale

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} - \dots + (-1)^n u_0. \tag{5}$$

Supposons-la établie pour les n premières différences de u_0. Si l'on introduit un nouveau terme u_{n+1}, on peut écrire en ajoutant une unité aux indices de u (**261**) :

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - C_n^1 u_n + C_n^2 u_{n-1} - \dots + (-1)^n u_1.$$

Mais $\Delta^{n+1} u_0 = \Delta^n u_1 - \Delta^n u_0$; par conséquent

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} u_0 &= u_{n+1} - (C_n^1 + 1)u_n + (C_n^2 + C_n^1)u_{n-1} - \dots + (-1)^{n+1} u_0 \\ &= u_{n+1} - C_{n+1}^1 u_n + C_{n+1}^2 u_{n+1} - \dots + (-1)^{n+1} u_0.\end{aligned}$$

Or la formule (5) est vérifiée par $n = 1, 2$, donc elle est vraie pour $n = 3, 4, \dots$; elle est donc générale.

On écrit la formule (5) symboliquement ainsi :

$$\Delta^n u_0 = (u - 1)^n,$$

en convenant de remplacer u^p par u_p et de prendre pour dernier terme du développement $(-1)^n u_0$.

266. Applications. — I. Appliquons la formule (5) à la suite

$$F(x), \quad F(x + h), \quad F(x + 2h), \quad \dots \quad F(x + nh),$$

$F(x)$ désignant le polynome $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots$ Nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta^n F(x) = F(x + nh) - C_n^1 F(x + \overline{n-1}h) + C_n^2 F(x + \overline{n-2}h) - \dots \\ + (-1)^{n-1} C_n^1 F(x + h) + (-1)^n F(x).\end{aligned}$$

Si $n = m$, cette égalité devient

$$m!\, A_0 h^m = F(x + mh) - C_m^1 F(x + \overline{m-1}h) + \dots + (-1)^m F(x).$$

Si $n > m$, on a $\Delta^n F(x) = 0$, et

$$F(x + nh) - C_n^1 F(x + \overline{n-1}h) + C_n^2 F(x + \overline{n-2}h) + \dots + (-1)^n F(x) = 0.$$

Réduisons $F(x)$ à x^m, et faisons $x = 1$, $h = 1$; les deux dernières formules deviennent

$$(m+1)^m - \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m - \ldots + (-1)^m = m!$$

$$(n+1)^m - \frac{n}{1} n^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^m - \ldots + (-1)^n = 0.$$

La dernière égalité suppose $n > m$.

Interpolation.

267. Définition. – Supposons connues les valeurs

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n$$

d'une fonction u, correspondantes aux valeurs

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

de la variable x. Le problème de l'interpolation consiste à déduire, des couples de valeurs

$$(u_0, x_0), \quad (u_1, x_1), \quad (u_2, x_2), \quad \ldots, \quad (u_n, x_n), \qquad (1)$$

la valeur de u qui correspond à une valeur quelconque de x.

Ce problème est *déterminé* lorsque u est une fonction entière de degré n. En effet, soit

$$u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n ; \qquad (2)$$

si l'on exprime que les couples de valeurs (1) vérifient l'équation (2), on obtient $n+1$ égalités de condition, desquelles on peut tirer les valeurs des $n+1$ inconnues A_0, A_1, ..., A_n. (Voir § **268**.)

Plus généralement, le problème est déterminé, si u est une fonction de forme connue et contenant $n+1$ paramètres indéterminés.

Ordinairement la forme de la fonction u est inconnue et, par suite, le problème de l'interpolation admet une infinité de solutions. Dans ce cas ou encore lorsque le calcul des valeurs numériques de la fonction présente des difficultés, on suppose que la fonction u soit développable en série suivant les puissances croissantes de x et que le développement soit assez convergent pour qu'on puisse le réduire à ses $n+1$ premiers

termes. Cette hypothèse donne des résultats suffisamment exacts pour les applications, lorsque les nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont assez rapprochés et que la valeur de x pour laquelle on doit chercher la valeur correspondante de u diffère peu de l'un des nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

268. Formule de Lagrange. — D'après ce qui précède, il s'agit de déterminer la fonction entière

$$u = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n \tag{3}$$

par la condition que pour les valeurs $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, elle prenne respectivement les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Les paramètres $A_0, A_1, \ldots, A_n$ résultent des égalités

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = A_0 + A_1x_0 + A_2x_0^2 + \ldots + A_nx_0^n, \\ u_1 = A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \ldots + A_nx_1^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = A_0 + A_1x_n + A_2x_n^2 + \ldots + A_nx_n^n. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est le déterminant de Vandermonde (**43**) des quantités $x_0, x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Comme il est égal au produit de toutes les différences des nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pris deux à deux, il n'est pas nul ; donc le système (4) admet une solution déterminée. Pour obtenir u, exprimons que les équations (3) et (4) sont compatibles ; il vient (**75**)

$$\begin{vmatrix} u & 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ u_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ u_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

En développant le déterminant (5) suivant les éléments de la 1re colonne, la solution prend la forme

$$u = P_0u_0 + P_1u_1 + P_2u_2 + \ldots + P_nu_n ; \tag{6}$$

P_0, P_1, ..., P_n désignent des fonctions entières de x, de degré n, et indépendantes des quantités u_0, u_1, ..., u_n.

Ces fonctions s'obtiennent aisément par la méthode suivante. Le second membre de (6) doit se réduire à u_0 pour $x = x_0$; donc pour $x = x_0$ les polynomes P_1, P_2 ... P_n s'annulent et P_0 prend la valeur 1 De même pour $x = x_1$, u se réduit à u_1 ; donc P_0, P_2, P_3, ... P_n s'annulent et P_1 prend la valeur 1 ; etc

D'après cela, le polynome P_0 étant de degré n et s'annulant pour $x = x_1$, x_2, .. , x_n, on a

$$P_0 = B_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

B_0 étant une constante ; comme $P_0 = 1$ pour $x = x_0$, on a

$$1 = B_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n),$$

et par suite

$$P_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

On obtient de même P_1, P_2, ..., P_n La fonction cherchée est donc

$$\left.\begin{aligned} u = {} & u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\ & + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + u_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Remarque. — Si l'on pose

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

la formule (7) peut être écrite ainsi :

$$u = \frac{F(x)}{(x - x_0)F'(x_0)} u_0 + \frac{F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} u_1 + \dots + \frac{F(x)}{(x - x_n)F'(x_n)} u_n.$$

Elle résulte aussi de la décomposition de $\frac{u}{F(x)}$ en fractions simples.

269. Première formule de Newton. — Elle s'applique seulement au cas où les valeurs

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_n \qquad (8)$$

correspondent à des valeurs de x en progression arithmétique

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad \ldots, \quad x_0 + nh. \tag{9}$$

Formons le tableau des différences successives de la suite (8); nous aurons (**264**)

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \ldots,$$

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} u_0 + \Delta^n u_0.$$

Ces diverses expressions seront données par la formule générale

$$\left.\begin{aligned} u_p = u_0 + \frac{p}{1}\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

pourvu que p soit un nombre entier non supérieur à n. En effet, si $p < n$, le développement s'arrête de lui-même au terme en $\Delta_p u_0$, les termes suivants renfermant le facteur nul $p - p$.

Cela posé, si l'on élimine p entre la relation (10) et l'égalité $x = x_0 + ph$, et qu'on remplace u_p par u, on trouve

$$\left.\begin{aligned} u = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h} - n + 1\right)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

c'est la formule cherchée, car le second membre est un polynome de degré n, qui prend les valeurs (8) pour les valeurs (9) de x.

270. Remarque. — Il est plus simple de considérer la formule (10) comme la formule cherchée, en sous-entendant que p est remplacé par $\frac{x - x_0}{h}$, où x désigne le nombre pour lequel on cherche la valeur correspondante de u.

271. Application. — Soit à trouver le logarithme du nombre

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,579\ldots$$

Prenons dans les tables de Callet les logarithmes des

nombres 3,12, 3,13, 3,14, 3,15 ... et formons le tableau de leurs différences :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
3,12	0, 494 154 594 0	0, 001 389 743 5	— 0, 0.. 4 432 9	0, 0... 280
3,13	0, 495 544 337 5	0, 001 385 310 6	— 0, 0... 4 404 8	0, 0 .. 280
3,14	0, 496 929 648 1	0, 001 380 905 7	— 0, 0... 4 376 9	
3,15	0, 498 310 553 8	0, 001 376 528 8		
3,16	0, 499 687 082 6			

La différence troisième étant *sensiblement* constante, log x se comporte dans l'intervalle (3, 12 — 3, 16) comme un polynome du 3ᵉ degré (**262**) et nous pouvons employer la formule (10) en faisant

$$n = 3, \quad x_0 = 3{,}12, \; h = 0{,}01, \quad p = \frac{\pi - 3,12}{h} = 2{,}159\,265\,357\,9.$$

Nous écrivons donc

$$\log \pi = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0,$$

en faisant

$$u_0 = \log 3{,}12 = 0{,}494\;154\;594\;0, \quad \Delta u_0 = 0{,}001\;389\;743\;5,$$
$$\Delta^2 u_0 = -0{,}000\;004\;432\;9, \quad \Delta^3 u_0 = 0{,}000\;000\;028\;0,$$
$$p = 2{,}159\;265\;357\;9, \quad \frac{p-1}{2} = 0{,}579\;632\;678\;9,$$
$$\frac{p-2}{3} = 0{,}053\;088\;452\;6;$$

ce qui donne, tous calculs faits,

$$\log \pi = 0{,}497\;149\;872\;7.$$

272. Seconde formule de Newton. — Newton a donné une seconde formule interpolatrice, qui s'applique à des valeurs quelconques de x et qui est plus pratique que la formule de Lagrange.

Pour fixer les idées, supposons connus quatre systèmes de valeurs (x_0, u_0), (x_1, u_1), (x_2, u_2), (x_3, u_3), des variables x, u. Nous prenons pour u une fonction entière du troisième degré sous la forme

$$u = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)(x - x_1) + D(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Les paramètres A, B, C, D sont déterminés par les égalités

$u_0 = A,$
$u_1 = A + B(x_1 - x_0),$
$u_2 = A + B(x_2 - x_0) + C(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$
$u_3 = A + B(x_3 - x_0) + C(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + D(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$

La première égalité détermine A. Si on la soustrait des autres et qu'on divise ensuite respectivement par $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$, il vient

$$\frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} = B,$$
$$\frac{u_2 - u_0}{x_2 - x_0} = B + C(x_2 - x_1),$$
$$\frac{u_3 - u_0}{x_3 - x_0} = B + C(x_3 - x_1) + D(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Désignons les premiers membres de ces équations par u'_1, u'_2, u'_3. On a $B = u'_1$, et si on soustrait la première équation des autres et qu'on divise les résultats par $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, on obtient

$$\frac{u'_2 - u'_1}{x_2 - x_1} = C,$$
$$\frac{u'_3 - u'_1}{x_3 - x_1} = C + D(x_3 - x_2).$$

Représentons les premiers membres de ces équations par u''_2, u''_3. Si nous éliminons C, nous trouvons

$$\frac{u''_3 - u''_2}{x_3 - x_2} = D;$$

soit u'''_3 le premier membre de cette égalité. La formule cherchée sera

$$u = u_0 + u'_1(x - x_0) + u''_2(x - x_0)(x - x_1) + u'''_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Pour calculer A, B, C, ..., on peut adopter la disposition suivante :

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	...
	u'_1	u'_2	u'_3	u'_4	...
		u''_2	u''_3	u''_4	...
			u'''_3	u'''_4	...
					...

Les quantités u'_1, u'_2, ..., u''_2, ..., portent le nom de *différences divisées;* chacune d'elles s'obtient en divisant la différence entre le terme qui la surmonte dans la ligne précédente et le premier terme de cette ligne, par la différence des valeurs correspondantes de x; par exemple, $u'''_4 = \dfrac{u''_4 - u''_2}{x_4 - x_2}$.

Pour abréger le calcul de u, on peut suivre une méthode analogue à celle qui sert à calculer rapidement la valeur numérique d'un polynome (**116**). Ce procédé est indiqué ci-dessous pour la fonction interpolatrice du troisième degré :

$$u = u_0 + (x - x_0)\{u'_1 + (x - x_1)[u''_2 + (x - x_2)u'''_3]\}.$$

Ainsi, on multiplie u'''_3 par $x - x_2$ et l'on ajoute u''_2 au produit, etc.

Application de la théorie des différences à la résolution des équations.

273. Soit à résoudre l'équation à coefficients numériques réels

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0.$$

Pour séparer les racines, on substitue à x des nombres compris entre les limites des racines. On facilite les calculs en substituant $(m + 1)$ nombres équidistants,

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_0 + mh,$$

et en formant le tableau des différences des valeurs correspondantes,

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_m,$$

de $F(x)$; de simples additions ou soustractions font alors trouver

$$F(x_0 + \overline{m+1}h), \quad F(x_0 + \overline{m+2}h), \quad \dots, \quad F(x_0 - h), \quad F(x_0 - 2h), \dots$$

274. D'après la première formule d'interpolation de Newton,

$$F(x_0 + ph) = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \dots$$
$$+ \frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}\Delta^m u_0. \qquad (1)$$

Cette formule montre que, si la suite

$$u_0, \quad \Delta u_0, \quad \Delta^2 u_0, \quad \dots, \quad \Delta^m u_0 \qquad (2)$$

ne présente que des permanences, $x_0 + (m-1)h$ est une limite supérieure des racines; car $F(x_0 + ph)$ aura un signe constant pour toutes les valeurs de p plus grandes que $m-1$. Si la suite (2) ne présente que des variations, tous les termes du second membre de (1) ont le même signe pour les valeurs négatives de p; par conséquent x_0 est une limite inférieure des racines de $F(x)$

275. Si les substitutions dont il a été question ci-dessus, révèlent l'existence d'une racine dans l'intervalle $(x_0 + ph, x_0 + \overline{p+1}h)$; on déterminera cette racine avec une plus grande approximation en divisant l'intervalle en μ parties égales et en calculant les valeurs de $F(x)$ pour

$$x = x_0 + \left(p + \frac{1}{\mu}\right)h, \quad x_0 + \left(p + \frac{2}{\mu}\right)h, \ldots, \quad x_0 + \left(p + \frac{\mu-1}{\mu}\right)h;$$

à cet effet, on remplacera dans la formule (1) p successivement par

$$p + \frac{1}{\mu}, \quad p + \frac{2}{\mu}, \quad \ldots \quad p + \frac{\mu-1}{\mu}.$$

Si $\mu > m$, on cherchera par ce procédé les m premiers résultats, et les autres par la méthode des différences (**263**).

276. Théorème de Choquet (*). — Les notations étant les mêmes que ci-dessus (273), écrivons la formule (1) ainsi :

$$F(x_0 + ph) = u_0 + p\Delta u_0 - \frac{p(1-p)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{p(1-p)(2-p)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

Si nous supposons p compris entre 0 et 1, les signes des coefficients de Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... sont mis en évidence. Le maximum de $\frac{p(1-p)}{1.2}$ sera $\frac{1}{8}$; celui de $\frac{p(1-p)(2-p)}{1.2.3}$ sera $\frac{1}{\sqrt{243}}$. D'où

$$\frac{p(1-p)(2-p)}{1.2.3} < \frac{1}{\sqrt{243}} < \frac{1}{15},$$

$$\frac{p(1-p)(2-p)(3-p)}{1.2.3.4} < \frac{p(1-p)(2-p)}{1.2.3} \cdot \frac{3}{4} < \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{4} \text{ ou } \frac{1}{20},$$

(*) Voir *Traité d'Algèbre*, par Choquet (Paris, Mallet-Bachelier, 1856, pp. 377-378 et 385-385); ***Note sur la résolution des équations algébriques de degré quelconque par la méthode des différences***, par M. Matrot (Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1875); ***Mathesis***, 1891, p. 218.

$$\frac{p(1-p)(2-p)(3-p)(4-p)}{1.2.3.4.5} < \frac{1}{20}\cdot\frac{4}{5} \text{ ou } \frac{1}{25},$$

. . . .

$$\frac{p(1-p)(2-p)\ldots(m-1-p)}{1.2\ldots.m} < \frac{1}{5m}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des nombres compris entre 0 et 1, on peut écrire

$$F(x_0+ph) = u_0 + \lambda_0\Delta u_0 - \frac{\lambda_2}{8}\Delta^2 u_0 + \frac{\lambda_3}{15}\Delta^3 u_0 \ldots + (-1)^m \frac{\lambda_m}{5m}\Delta^m u_0.$$

Il résulte de là que, chaque fois que u_0 surpasse en valeur absolue l'ensemble des termes de signe contraire à celui de u_0, termes où l'on remplace les λ par 1, la fonction $F(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle (x_0, x_0+h).

Cette remarque peut servir à reconnaître des intervalles qui ne renferment pas de racine de $F(x) = 0$.

Exercices et notes.

1. (*) La série qui a pour terme général

$$u_n = \frac{\varphi(n)}{1.2\ldots n},$$

où $\varphi(n)$ est un polynome de degré p, est convergente. Trouver la somme.

(Darboux).

Si l'on forme les différences successives de la suite

$$\varphi(0),\quad \varphi(1),\quad \varphi(2),\quad \ldots,\quad \varphi(p),$$

on a
$$\varphi(n) = \varphi(0) + \frac{n}{1}\Delta\varphi(0) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\varphi(0) + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p\varphi(0);$$

par conséquent (on suppose $u_0 = \varphi(0)$)

$$\sum_0^\infty \frac{\varphi(n)}{1.2\ldots n} = e\left[\varphi(0) + \frac{\Delta\varphi(0)}{1} + \frac{\Delta^2\varphi(0)}{1.2} + \ldots + \frac{\Delta^p(0)}{1.2\ldots p}\right].$$

2. Trouver la somme de la série dont le terme général est

$$\frac{\varphi(n)}{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p)},$$

$\varphi(n)$ désignant un polynome au plus de degré $p-1$. (Darboux).

(*) Les exercices 1° et 2° supposent la connaissance des séries.

Formant les différences successives de la suite

$$\varphi(-a),\quad \varphi(-a-1),\quad \ldots,\quad \varphi(-a-p+1),$$

nous aurons

$$\varphi(n) = \varphi(-a) + \frac{n+a}{1}\,\frac{\Delta\varphi(-a)}{-1} + \frac{(n+a)(n+a+1)}{1.2}\,\frac{\Delta^2\varphi(-a)}{(-1)^2}$$
$$+ \ldots + \frac{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p-2)}{1.2\ldots(p-1)}\,\frac{\Delta^{p-1}\varphi(-a)}{(-1)^{p-1}};$$

la série proposée a donc pour somme

$$\frac{\varphi(-a)}{1}\,\frac{1}{p}\,\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+p-1)} - \frac{\Delta\varphi(-a)}{1}\,\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+p-1)}$$
$$+ \frac{\Delta^2\varphi(-a)}{1.2}\,\frac{1}{p-2}\,\frac{1}{(a+2)(a+3)\ldots(a+p-1)} \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\,\frac{\Delta^{p-1}\varphi(-a)}{1.2\ldots(p-1)}\,\frac{1}{p-p+1}\,\frac{1}{a+p-1}.$$

3. L'équation

$$F(a)x^m + F(a+1)x^{m-1} + F(a+2)x^{m-2} + \ldots + F(a+m) = 0,$$

où $F(a)$ désigne une fonction entière de degré $m-2$, au plus, a toujours des racines imaginaires. (FAURE.)

Soit $m-s$ le degré de $F(a)$, s étant au moins égal à 2. Si on multiplie le premier membre de l'équation par $(x-1)^{m-s+1}$, les coefficients des termes en $x^m, x^{m-1}, \ldots, x^{m-s+1}$ sont les différences d'ordre $m-s+1$ d'une fonction entière de degré $m-s$; ce produit présente donc des lacunes.

4. Démontrer la formule d'interpolation

$$u = u_0\,\frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\ldots\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\ldots\sin(x_0-x_n)}$$
$$+ u_1\,\frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)\ldots\sin(x-x_n)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\ldots\sin(x_1-x_n)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u_n\,\frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_1)\ldots\sin(x-x_{n-1})}{\sin(x_n-x_0)\sin(x_n-x_1)\ldots\sin(x_n-x_{n-1})}.$$

5. Démontrer la formule d'interpolation

$$u = \frac{A_0u_0F_0 + A_1u_1F_1 + \ldots + A_nu_nF_n}{A_0F_0 + A_1F_1 + \ldots + A_nF_n},$$ (BRASSINE).

où F_p désigne le produit de toutes les différences $x-x_0, x-x_1, \ldots, x-x_n$, à l'exception de $x-x_p$.

6. n étant un nombre entier positif plus grand que 1, démontrer la formule

$$n^{2n-2} - \frac{2n}{1}(n-1)^{2n-2} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}(n-2)^{2n-2} - \dots$$

$$+ \frac{2n(2n-1)\dots(n+3)}{1.2\dots(n-2)}2^{2n-2} \mp \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{1.2\dots(n-1)} = 0. \quad \text{(W. Kapteyn.)}$$

7. Dans la seconde formule de Newton (**273**),

$$A = u_0, \quad B = \frac{u_0}{x_0 - x_1} + \frac{u_1}{x_1 - x_0},$$

$$C = \frac{u_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{u_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{u_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \text{ etc.}$$

CHAPITRE XIX.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

277. Définitions. — On nomme *fonction symétrique* ou *uniforme* des lettres a, b, .. l toute expression formée avec ces lettres, qui ne change pas quand on permute d'une manière quelconque deux ou un plus grand nombre de ces lettres. Exemples :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \quad \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b}.$$

Une fonction symétrique entière est nécessairement une fonction symétrique homogène ou la somme de telles fonctions. Par exemple, si une fonction symétrique des lettres a, b, c, contient le terme $3a^3b$, elle comprend nécessairement le polynome

$$3a^3b + 3ab^3 + 3bc^3 + 3b^3c + 3c^3a + 3ca^3,$$

que l'on désigne par $3\,\Sigma a^3b$; si l'on y trouve le terme $-2ab$ non compris dans les précédents, une seconde partie de cette fonction est

$$-2ab - 2bc - 2ca$$

ou $-2\,\Sigma ab$; et ainsi de suite.

On nomme *fonction symétrique simple*, toute fonction symétrique rationnelle, entière et homogène dont chaque terme ne contient qu'une lettre ; telle est la fonction

$$a^\alpha + b^\alpha + \ldots + l^\alpha,$$

que nous désignerons par s_α.

Une *fonction double* est une fonction symétrique, rationnelle, entière et homogène dont chaque terme ne contient que deux lettres ; une *fonction triple* est celle dont chaque terme contient trois lettres ; et ainsi de suite. Par exemple, l'expression

$$a^3(b - c)^2 + b^3(c - a)^2 + c^3(a - b)^2$$

est la somme de la fonction double $\Sigma a^3 b^2$ et de la fonction triple $-2\Sigma a^3 bc$.

Nous verrons que ***toute fonction symétrique rationnelle des racines d'une équation algébrique s'exprime rationnellement au moyen des coefficients des racines de cette équation***, c'est-à-dire au moyen des *fonctions symétriques élémentaires*

$$\Sigma a, \quad \Sigma ab, \quad \Sigma abc, \quad \ldots, \quad abc \ldots l.$$

278. Formules de Newton. — I. Soient $a, b, \ldots l$ les racines de

$$F(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

en sorte que

$$F(x) \equiv (x - a)(x - b) \ldots (x - l).$$

En dérivant cette identité, on obtient

$$F'(x) \equiv (x - b)(x - c) \ldots (x - l) + (x - a)(x - c) \ldots (x - l) + \ldots$$
$$\equiv \frac{F(x)}{x - a} + \frac{F(x)}{x - b} + \ldots + \frac{F(x)}{x - l}. \qquad (1)$$

Si l'on effectue la division de $F(x)$ par $x - a$, on trouve

$$\frac{F(x)}{x - a} = x^{m-1} + \begin{vmatrix} a \\ p_1 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} a^2 \\ + p_1 a \\ + p_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots + \begin{vmatrix} a^{m-1} \\ + p_1 a^{m-2} \\ + p_2 a^{m-3} \\ + \ldots \\ + p_{m-1}. \end{vmatrix}$$

Remplaçons a successivement par b, c, ... l et faisons la somme des résultats; nous aurons, eu égard à la relation (1),

$$\begin{array}{rl|l|l} F'(x) = s_0 x^{m-1} + & s_1 & x^{m-2} + s_2 & x^{m-3} + \ldots + s_{m-1} \\ & + p_1 s_0 & + p_1 s_1 & + p_1 s_{m-2} \\ & & + p_2 s_0 & + p_2 s_{m-3} \\ & & & + \ldots \\ & & & + p_{m-1} s_0. \end{array}$$

Mais

$$F'(x) = m x^{m-1} + (m-1) p_1 x^{m-2} + (m-2) p_2 x^{m-3} + \ldots + p_{m-1};$$

par suite

$$\begin{aligned} & s_1 + p_1 s_0 = (m-1) p_1, \\ & s_2 + p_1 s_1 + p_2 s_0 = (m-2) p_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & s_{m-1} + p_1 s_{m-2} + p_2 s_{m-3} + \ldots + p_{m-1} s_0 = p_{m-1}; \end{aligned}$$

ou, après simplification,

$$\left.\begin{aligned} & s_1 + p_1 = 0, \\ & s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0, \\ & s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & s_{m-1} + p_1 s_{m-2} + p_2 s_{m-3} + \ldots + p_{m-2} s_1 + (m-1) p_{m-1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

De ces formules, on peut tirer $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ en fonction des coefficients $p_1, p_2, \ldots p_{m-1}$ ou inversement, ces coefficients en fonction de $s_1, s_2, \ldots s_{m-1}$.

II. $a, b, \ldots, l$ étant les racines de $F(x) = 0$, on a

$$\left.\begin{aligned} & a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + \ldots + p_m = 0, \\ & b^m + p_1 b^{m-1} + p_2 b^{m-2} + \ldots + p_m = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & l^m + p_1 l^{m-1} + p_2 l^{m-2} + \ldots + p_m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

En additionnant ces égalités, on trouve

$$s_m + p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} + \ldots + p_m s_0 = 0;$$

d'où l'on déduit s_m en fonction de $s_{m-1}, s_{m-2}, \ldots$

Multipliant les relations (3) respectivement par $a^n, b^n, \ldots l^n$ et faisant la somme des résultats, on obtient

$$s_{m+n} + p_1 s_{m+n-1} + p_2 s_{m+n-2} + \ldots + p_m s_n = 0, \quad (4)$$

formule qui servira à calculer successivement $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots$

III. Nous supposons p_m différent de zéro, de manière que l'équation proposée n'a pas de racine nulle.

Pour $n = -1, -2, -3, \ldots$ la formule (4) donne

$$s_{m-1} + p_1 s_{m-2} + \ldots + p_{m-1} s_0 + p_m s_{-1} = 0,$$
$$s_{m-2} + p_1 s_{m-3} + \ldots + p_{m-1} s_{-1} + p_m s_{-2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations déterminent $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$

On peut obtenir les mêmes quantités $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ en cherchant les sommes $s_1, s_2, \ldots$ relatives à l'équation

$$p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_1 x + 1 = 0.$$

Autre solution. — I. Reprenons l'égalité (1) sous la forme

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-l}.$$

En effectuant la division de 1 par $x - a$ on trouve

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots;$$

le second membre peut être prolongé indéfiniment et le reste de la division tend vers zéro à mesure que le nombre des termes du quotient croît, pourvu que le module x soit supérieur à celui de a.

Si l'on remplace a successivement par chacune des autres racines et qu'on ajoute ensemble les résultats, on aura

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{m}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots$$

Effectuons la division de $F'(x)$ par $F(x)$, ces deux polynomes étant ordonnés suivant les puissances décroissantes de x; le quotient aura la forme

$$\frac{m}{x} + \frac{Q_1}{x^2} + \frac{Q_2}{x^3} + \ldots$$

Les coefficients $Q_1, Q_2, \ldots$ sont les valeurs cherchées de $s_1, s_2, \ldots$.

II. Effectuons la division de 1 par $a - x$; nous aurons en *série convergente*

$$\frac{1}{x-a} = -\left(\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots\right),$$

pourvu que le module de x soit inférieur à celui de a.

En remplaçant a successivement par chacune des autres racines et en ajoutant les résultats on obtient

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_{-1} + s_{-2}x + s_{-3}x^2 + \ldots.$$

Si l'on ordonne $F'(x)$ et $F(x)$ suivant les puissances croissantes de x et qu'on effectue ensuite la division de $F'(x)$ par $F(x)$, le quotient sera de la forme

$$q_1 + q_2 x + q_3 x^2 + \ldots,$$

d'où l'on déduit $s_{-1} = -q_1$, $s_{-2} = -q_2$, ...

279. Fonctions symétriques composées. — I. $a, b, \ldots, l$ étant les racines de l'équation $F(x) = 0$, cherchons la fonction symétrique $\Sigma a^p b^q$, que nous représentons par $s_{p,q}$.

A cet effet, multiplions membre à membre, les identités

$$s_p = a^p + b^p + \ldots + l^p,$$
$$s_q = a^q + b^q + \ldots + l^q;$$

les termes du produit des seconds membres seront de deux espèces : les uns composent la somme s_{p+q}, les autres la somme $s_{p,q}$; donc

$$s_{p,q} = s_p s_q - s_{p+q}.$$

Cependant, si $p = q$, les termes de la seconde espèce sont égaux deux à deux et la formule cherchée est

$$2 s_{p,p} = s_p^2 - s_{2p}.$$

II. Pour calculer la fonction symétrique $\Sigma a^p b^q c^r$, que nous désignons par $s_{p,q,r}$, multiplions, membre à membre, les trois identités

$$s_p = a^p + b^p + \ldots + l^p,$$
$$s_q = a^q + b^q + \ldots + l^q,$$
$$s_r = a^r + b^r + \ldots + l^r.$$

Le produit des seconds membres renfermera des termes de trois espèces suivant que l'on prend la même lettre dans les trois polynomes ou deux fois la même lettre et une lettre différente ou trois lettres différentes : ceux de la seconde espèce peuvent encore se partager en trois groupes, suivant que la même lettre est prise dans le premier et le second polynome, ou dans le second et le troisième ou dans le premier et le troisième. D'après cela,

$$s_p s_q s_r = s_{p+q+r} + s_{p+q,r} + s_{q+r,p} + s_{r+p,q} + s_{p,q,r}; \qquad (1)$$

en observant que les fonctions doubles ont pour expressions

$$s_{p+q,r} = s_{p+q} s_r - s_{p+q+r}, \text{ etc.}$$

on trouve

$$s_{p,q,r} = s_p s_q s_r - s_p s_{q+r} - s_q s_{p+r} - s_r s_{p+q} + 2 s_{p+q+r}.$$

Cette formule doit être modifiée lorsque deux des exposants p, q, r ou tous les trois exposants sont égaux.

Supposons d'abord $p = q \neq r$; les sommes désignées par $s_{p+r,q}$ et $s_{q+r,p}$ deviennent égales et la somme désignée tantôt par $s_{p,q,r}$ se réduit à $2s_{p,p,r}$. Donc l'égalité (1) se change en

$$s_p^2 s_r = s_{2p+r} + s_{2p,r} + 2s_{p+r,p} + 2s_{p,p,r}.$$

Si $p = q = r$, on a

$$s_p^3 = s_{3p} + 3s_{2p,p} + 6s_{p,p,p}.$$

III. En suivant la même marche, on calculera successivement les fonctions du 4e ordre, celles du 5e ordre, etc. Toutes ces fonctions s'expriment rationnellement par les coefficients de F(x).

Remarque. — Dans ce qui précède, nous avons ramené les fonctions symétriques composées aux fonctions s_1, s_2, s_3, ..., et ces dernières ont été exprimées par les coefficients de F(x).

Souvent, il est plus simple de recourir directement aux fonctions élémentaires Σa, Σab, Σabc, ...

Soit, par exemple, à chercher Σa^2bc. Si l'équation proposée est du troisième degré, on a immédiatement

$$\Sigma a^2bc = abc\,\Sigma a = p_3 p_1.$$

Dans le cas général,

$$p_1 p_3 = \Sigma abc \,.\, \Sigma a = \Sigma a^2bc + \Sigma abcd,$$

d'où

$$\Sigma a^2bc = p_1 p_3 - p_4.$$

280. Ordre et poids d'une fonction symétrique entière. — Soit $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ une fonction symétrique entière et homogène des racines a, b, ..., l de l'équation

$$F(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0.$$

Elle s'exprime par une fonction entière $\varphi(p_1, p_2, \dots)$ des coefficients de F(x), dont la partie littérale peut se déduire de l'*ordre* et du *poids* de cette expression.

On appelle *ordre* d'un terme de $\varphi(p_1, p_2, \dots)$ le nombre de ses facteurs p, et *poids* la somme de ses indices ; par exemple, l'ordre du terme $p_1^q p_2^r p_3^s$ est $q + r + s$, et son poids est $q + 2r + 3s$.

Si, dans $\varphi(p_1, p_2, \ldots)$, on remplace p_1 par $-\Sigma a$, p_2 par Σab, etc., on doit obtenir la fonction proposée $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ On en conclut que tous les termes de $\varphi(p_1, p_2, \ldots)$ ont le même poids $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ Car si on multiplie les racines $a, b, \ldots, l$ par un même nombre λ, la fonction $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ est multipliée par $\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$; les coefficients $p_1, p_2, \ldots$ sont multipliés respectivement par $\lambda, \lambda^2, \ldots$ et un terme $p_1^q p_2^r p_3^s \ldots$ est multiplié par $\lambda^{q+2r+3s+\cdots}$; l'identité

$$\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = \varphi(p_1, p_2, \ldots),$$

après cette transformation, doit être indépendante de λ.

Si la fonction $\varphi(p_1, p_2, \ldots)$ n'est pas homogène, son ordre est défini par celui du terme le plus élevé; il est égal au plus élevé des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ En effet, si $b, c, \ldots l$ sont les racines de l'équation

$$\frac{F(x)}{x-a} = x^{m-1} + q_1 x^{m-2} + q_2 x^{m-3} + \ldots + q_{m-1} = 0,$$

on a

$$p_1 = -a + q_1, \quad p_2 = -aq_1 + q_2, \quad p_3 = -aq_2 + q_3, \quad \ldots;$$

en portant ces dernières valeurs dans $\varphi(p_1, p_2, \ldots)$, on obtient une expression qui est, par rapport à a, d'un degré égal à l'ordre de $\varphi(p_1, p_2, \ldots)$. Comme on doit retrouver $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots$, cet ordre ne peut être inférieur à α. Il ne peut non plus être supérieur à α si $\alpha > \beta > \gamma \ldots$, car le coefficient de la plus haute puissance de a dans un terme $p_\mu^r p_\nu^s p_\rho^t \ldots$ est $\pm q_{\mu-1}^r q_{\nu-1}^s q_{\rho-1}^t$ et réciproquement ce dernier facteur ne peut provenir que de $p_\mu^r p_\nu^s p_\rho^t \ldots$ de sorte qu'il ne peut se réduire à zéro par l'addition d'autres termes

Exemple. — Trouver pour une équation du quatrième degré la fonction symétrique $V = \Sigma a^2(b+c)^2$.

L'ordre et le poids de V étant 2 et 4, un terme de l'expression de V en fonction de p_1, p_2, p_3, p_4 ne peut contenir plus de deux facteurs p, et la somme de ses indices doit être égale à 4. On peut donc poser

$$V = Ap_4 + Bp_3 p_1 + Cp_2^2.$$

Pour déterminer les coefficients A, B, C nous donnons à a, b, c, d des valeurs particulières. Si nous supposons $a = b = 1$, $c = d = 0$, nous aurons

$$p_4 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_2 = 1, \quad p_1 = -2, \quad V = 4;$$

d'où l'on conclut $C = -4$. Si $a = b = c = 1$, $d = 0$, on a

$$p_4 = 0, \quad p_3 = -1, \quad p_2 = 3, \quad p_1 = -3, \quad V = 18;$$

d'où $B = -6$. Enfin, l'hypothèse $a = b = 1$, $c = d = -1$ donne

$$p_4 = 1, \quad p_3 = 0, \quad p_2 = -2, \quad p_1 = 0, \quad V = 16,$$

par conséquent $A = 0$. Donc

$$V = 4p_2^2 - 6p_3p_1. \tag{1}$$

Pour vérifier ce résultat, observons que

$$\Sigma a^2(b+c)^2 = 4\Sigma a^2b^2 + 2\Sigma a^2bc,$$
$$p_2^2 = \Sigma^2 ab = \Sigma a^2b^2 + 2\Sigma a^2bc + 6abcd,$$
$$p_3p_1 = \Sigma a\Sigma abc = \Sigma a^2bc + 4abcd;$$

en portant ces valeurs dans l'égalité (1), on obtient une identité.

281. Produit des différences des racines d'une équation. — Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences de l'équation $F(x) \equiv x^m + A_1x^{m-1} + \ldots = 0$ est

$$V = (b-a)^2(c-a)^2 \ldots (l-a)^2(c-b)^2 \ldots (l-k)^2.$$

On a (**43**)

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & c & \ldots & l \\ a^2 & b^2 & c^2 & \ldots & l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{m-1} & b^{m-1} & c^{m-1} & \ldots & l^{m-1} \end{vmatrix};$$

d'où, en faisant le carré du déterminant (**52**),

$$V = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_m \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix},$$

où $s_i = a^i + b^i + \ldots + l^i$.

On a aussi

$$V = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} F'(a)F'(b) \ldots F'(l),$$

car $F'(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-l)$, etc.

282 Théorème. — *Une fonction rationnelle d'une racine unique de l'équation* $F(x) = 0$, *de degré* m, *peut toujours s'exprimer par une fonction entière de cette racine dont le degré est au plus* m — 1.

Soient $a, b, \dots l$ les racines de $F(x)$, et considérons la fraction rationnelle

$$y = \frac{f(a)}{\varphi(a)}.$$

En multipliant les deux termes par $\varphi(b)\varphi(c)\dots\varphi(l)$ on a

$$y = f(a)\frac{\varphi(b)\varphi(c)\dots\varphi(l)}{\varphi(a)\varphi(b)\dots\varphi(l)}.$$

Le dénominateur de la dernière fraction est une fonction symétrique des racines de $F(x)$, et le numérateur est une fonction symétrique des racines de $\frac{F(x)}{x-a}$; les coefficients du quotient de $F(x)$ par $x - a$ sont des fonctions entières de a. Il résulte de là que y se ramène à une fonction entière $\psi(a)$. Si $\psi(a)$ est d'un degré plus élevé que $F(a)$ ou de même degré, divisons $\psi(a)$ par $F(a)$: nous aurons

$$\psi(a) = F(a).Q(a) + R(a) = R(a).$$

puisque $F(a) = 0$. Le degré de $R(a)$ est inférieur à celui de $\psi(a)$.

283. Elimination par les fonctions symétriques. — Pour que deux équations

$$f(x) = x^m + p_1x^{m-1} + \dots + p_m = 0,$$
$$g(x) = x^n + q_1x^{n-1} + \dots + q_n = 0$$

aient une racine commune, une certaine fonction R de leurs coefficients doit être nulle. R est le *résultant* ou l'*éliminant* de $f(x)$ et $g(x)$ (**173**).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les racines de la première équation ; l'une d'elles doit vérifier la seconde équation. Par suite, le produit

$$g(\alpha_1).g(\alpha_2)\dots g(\alpha_m) \tag{1}$$

doit être nul. Ce produit étant une fonction symétrique des racines de $f(x)$, on peut l'exprimer par les coefficients $p_1, p_2, \dots p_m$ et l'on a ainsi R.

Par exemple, l'éliminant des équations

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0, \quad x^3 + q_1 x^2 + q_2 x + q_3 = 0$$

s'obtient en effectuant le produit

$$(\alpha_1^3 + q_1 \alpha_1^2 + q_2 \alpha_1 + q_3)(\alpha_2^3 + q_1 \alpha_2^2 + q_2 \alpha_2 + q_3)$$
$$= \alpha_1^3 \alpha_2^3 + q_1 \alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + q_2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + q_3 (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) + q_1^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2$$
$$+ q_2^2 \alpha_1 \alpha_2 + q_1 q_2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + q_1 q_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + q_2 q_3 (\alpha_1 + \alpha_2) + q_3^2,$$

et en éliminant α_1 et α_2 au moyen des égalités

$$\alpha_1 \alpha_2 = p_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -p_1, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = p_1^2 - 2p_2, \quad \alpha_1^3 + \alpha_2^3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2.$$

De même, si $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sont les racines de $g(x)$, l'éliminant R peut se déduire du produit

$$f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_n) : \qquad (2)$$

on effectue la multiplication et on substitue aux fonctions symétriques des racines $\beta_1, \beta_2, \ldots$ leurs expressions en $q_1, q_2, \ldots$

Comme on a

$$g(x) \equiv (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n),$$
$$f(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$

les produits (1) et (2) se ramènent respectivement à

$$(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \ldots (\alpha_1 - \beta_n)(\alpha_2 - \beta_1) \ldots (\alpha_m - \beta_n), \qquad (3)$$
$$(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2) \ldots (\beta_1 - \alpha_m)(\beta_2 - \alpha_1) \ldots (\beta_n - \alpha_m),$$

expressions qui ne peuvent différer que par le signe.

Tous les termes du résultant ont le même poids mn, *égal au produit des degrés des deux équations.* En effet, si dans le résultant on remplace $p_1, p_2, \ldots q_1, q_2, \ldots$ par $-\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2, \ldots, -\Sigma\beta_1$, $\Sigma\beta_1\beta_2, \ldots$ on doit trouver le produit (3). Or, chacun de ces coefficients renferme autant de facteurs α ou β qu'il est marqué par son indice; d'autre part, si l'on effectue le produit (3), chaque terme est composé de mn facteurs α ou β. Donc la somme des indices de chaque terme du résultant est égale à mn.

Remarque. — Si l'on écrit

$$f(x) \equiv p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots, \quad g(x) \equiv q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots,$$

et que l'on considère le résultant sous la forme (1) ou (2) (*), on

(*) On sous-entend ici que les α ou β sont éliminés au moyen des valeurs des fonctions symétriques, et que l'on néglige le dénominateur amené par ces valeurs.

voit qu'il est une fonction homogène, de degré m, des coefficients de $g(x)$, et une fonction homogène, de degré n, des coefficients de $f(x)$.

284. Théorème de Bezout. — Considérons un système de deux équations générales à deux inconnues :

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0,$$

la première de degré m, la seconde de degré n. Si on les ordonne par rapport à x, elles prennent la forme

$$f(x, y) \equiv p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0,$$
$$g(x, y) \equiv q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \dots + q_n = 0,$$

où les coefficients p et q représentent des fonctions de y dont le degré est égal à l'indice du coefficient.

Soit $x = a$, $y = b$ une solution du système. Si l'on remplace y par b, les équations $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ acquièrent une solution commune $x = a$; par suite leur résultant doit être nul. Si donc on égale à zéro le résultant de $f(x, y)$ et $g(x, y)$ en laissant subsister la lettre y, l'équation ainsi obtenue est *l'équation finale* en y. Le poids du résultant écrit avec les lettres p_0, p_1, … q_0, q_1, … est mn ; en remplaçant ces lettres par des fonctions de y d'un degré égal à l'indice, on obtient une fonction entière de y de degré mn.

On en conclut que ***deux équations à deux inconnues admettent autant de solutions communes qu'il est marqué par le produit de leurs degrés.***

Cet énoncé suppose deux équations générales, écrites avec des coefficients indéterminés. Dans des cas particuliers, le nombre des solutions communes peut subir une réduction.

Exercices et notes.

1. $$s_{p,q,r,t} = s_p s_q s_r s_t - \Sigma s_p s_q s_{r+t} + 2\Sigma s_p s_{q+r+t} - 6 s_{p+q+r+t},$$
$$24 s_{p,p,p,p} = s_p^4 - 6 s_p^2 s_{2p} + 8 s_p s_{3p} + 3 s_{2p}^2 - 6 s_{4p}.$$

2. a, b, …, l étant les racines de $F(x) = 0$ et $\varphi(x)$ désignant une fonction entière, trouver la somme

$$V = \varphi(a) + \varphi(b) + \dots + \varphi(l).$$

On peut écrire symboliquement $V = \varphi(s)$, en remplaçant x^p par s_p.

En observant que

$$\frac{\varphi(x)F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{x-b} + \dots + \frac{\varphi(x)}{x-l},$$

et en effectuant les divisions indiquées, on peut identifier le reste de la première division, divisé par le diviseur $F(x)$, avec la somme des restes des autres divisions, divisés par le diviseur correspondant, ce qui donne

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(a)}{x-a} + \frac{\varphi(b)}{x-b} + \dots + \frac{\varphi(l)}{x-l}$$

ou $$R(x) = \Sigma\varphi(a)(x-b)\dots(x-l).$$

Egalons les coefficients des plus hautes puissances dans les deux membres ; ce coefficient, dans le second membre, est égal à V, etc.

3. $$\Sigma a^2b^2c = -p_2p_3 + 3p_1p_4 - 5p_5,$$
$$\Sigma a^2b^2cd = p_2p_4 - 4p_1p_5 + 9p_6,$$
$$\Sigma a^2b^2c^2 = -2p_6 + 2p_1p_5 - 2p_2p_4 + p_3^2.$$
$$\Sigma(a-b)^2 = ms_2 - s_1^2.$$

ERRATA

(Ligne 3, signifie ligne 3 en remontant.)

Pages.

2, ligne 18, au lieu de : $A_m \; _1 x$, lire : $A_{m-1}x$.
4, ligne 4, au lieu de : $| a + bi$., lire : $| a + bi |$.
8, ligne 12, » $z \; + z$, lire : $z + z'$.
» ligne 9, » $OZ_1 = OZ$, lire : $OZ_1 = OZ'$.
11, ligne 3, » fig. 7, lire : fig. 8.
13, fig. 9, » A, lire : A_5.
19, ligne 11, » $\cos\left(a + \frac{m}{2} \; 1 \; b\right)$, lire : $\cos\left(a + \frac{m-1}{2} b\right)$.
32, ligne 15, » a_{pu}, lire : a_{pn}.
34, ligne 9, » $= | a_1 a_1 - b_1 c_1 + |$, lire : $= | a_1 a_1 - b_1 c_1 | +$.
35, ligne 13, lire : $D = (b - a)(c - a)(c - b)m$.
36, ligne 20, au milieu de la ligne, au lieu de $\alpha_1\gamma_1\beta_3$, lire $\alpha_1\gamma_2\beta_3$.
42, ligne 3, au lieu de $(- 1^{\mu + \mu'}$, lire : $(-1)^{\mu+\mu'}$.
43, ligne 14, » » » »
45, ligne 1. La dernière ligne du déterminant δ est 0, 0, 0, 0, 1.
48, ligne 2, au lieu de : est nul, lire : est un.
56, exercice 27. Lire : Appelons A_p ..., et B_p le déterminant....
» Lire : $+ (-1)^n A_{n+1} B_{n+1} = 0$.
63. Au § 78, la première ligne du déterminant (1) est $a_{11} \; a_{12} \; \ldots \; a_{1n} \; a_{1m}$.
64, ligne 1. Lire : $X_1, X_2, \ldots X_m$.
79, fig. 11. Mettre la lettre O à gauche sur la ligne.
84, § 84, l'égalité (1) commence par $\frac{F(x)}{A_0 x^m}$.
88, ligne 5, lire : $F(x) = A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_m x^m$.
90, ligne 8, au lieu de $| F(x) > | R$, lire : $| F(x) | > R$.
95, fig. 12, la lettre X manque sur la ligne OP.
109, ligne 19, au lieu de : A_n, lire : A_m.
112, exercice 25, ligne 3, lire : (Réponse : $y = 28x^3$).
113, ligne 6, lire : $y = -x$, $F(x) = 0$.
127, § 146, ligne 7, l'avant dernier terme est $- A_{p+1}x^{p+1}$.
129, § 160, ligne 3, l'équation se termine par : $A_{m-1}x + A_m = 0$.
» » ligne 7, au lieu de : $A_1 x^{m-1} b$, lire : $A_1 a^{m-1} b$.

Pages.

141, ligne 3, au lieu de : $x + px + q$, lire : $x^2 + px + q$.

148, ligne 6, au lieu de : $+ U_{k-1}Q_{k-1}$, lire : $- U_{k-1}Q_{k-1}$.

» » 7, » $- AU_k$, lire : $= AU_k$.

149, ligne 15, la ligne se termine par : et par suite.

166, ligne 2, lire : $F''_{y,x}$, F''_{y^2}.

167, lignes 16 et 17. L'expression commence par $x^p F^{(p)}_{x^p}$ et se termine par $y^p F^{(p)}_{y^p}$.

171, ligne 3, le 2e terme est $ax^{p-q}y^q$.

178, exercice 3, au lieu de : X_n, lire X_m.

180, ligne 16, fin, lire : $-(a - \lambda)(b - \lambda)$.

183, ligne 6, le premier membre est : $m_n \alpha^{n} \beta^{m-n}$.

193, ligne 9, au lieu de : $m - \mu < m - i - \nu$, lire : $m - \mu > m - i - \nu$.

198, ligne 10, le terme du milieu est : $A_n x^n$.

200, exercice 4, lire : k étant un nombre donné.

203, ligne 1, au lieu de : Soit $m < n$, lire : Soit $m > n$.

206, ligne 2, lire : $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$.

216, ligne 6, lire : $2q' = p^2 - 10 - \frac{q}{p}$.

225, ligne 4, au lieu de $L' = 1 + \sqrt[4]{10}$ ou 3, lire : un groupement des termes donne : $L' = \sqrt[4]{10}$ ou 2.

226, ligne 7, au lieu de : $L + 5$, lire : $L = 5$.

241, ligne 7, lire : on trouve $A_{\alpha-2}$.

267, ligne 5, au lieu de : $\frac{x^2}{a^2}$, lire : $\frac{x^2}{a^3}$.

268, ligne 10, au lieu de : l_q, lire l^q.

» » 14, » s_{pq}, lire : $s_{p,q}$.

» » 17, » $s2_p$, lire : s_{2p}.

» » 18, » $\Sigma a^q b^p c^r$, lire : $\Sigma a^p b^q c^r$.

» » 23, » a_r, lire : a^r.

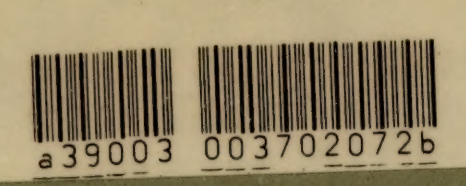
» » 1, » $s_{p+p,r}$, lire : $a_{p+q,r}$.

269, ligne 2 Le signe — manque devant l'avant-dernier terme.

» » 21 Au lieu de $\Sigma\, abc$, lire : $\Sigma\, a^2bc$.

TABLE DES MATIÈRES




a39003 003702072b

